Astrophysics of Planet Formation[1]

C1SB2064　　辻 勇吹樹

2024 年 5 月 17 日

5.5 Coagulation Equation

Coagulation theory

暴走成長のモデルをより厳密に記述できる理論。

Coagulation equation

$$\frac{\mathrm{d}n_k}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\sum_{i+j=k} A_{ij}n_in_j - n_k\sum_{i=1}^{\infty} A_{ik}n_i \tag{1}$$

A_{ij} : 核 (kernel)、第 1 項は合体による増加、第 2 項は衝突による減少を表す。解析解が得られるのは kernel が次の場合。

- $A_{ij} = \alpha$: 秩序成長
- $A_{ij} = \alpha(m_i + m_j)$: 秩序成長
- $A_{ij} = \alpha(m_im_j)$: 暴走成長

これまでの暴走成長の説明では、質量 M で速度が比較的無視できる原始惑星と、質量 m で速度分散を持つ微惑星を考えてそれらの質量進化を考えていた。しかしこの 2 つのグループを考えること自体が暴走成長の結果を表しており循環論法となっているように思える。適当な質量分布から初めて暴走成長をもたらすような、より厳密な計算を行なう場合は Coagulation theory と呼ばれるモデルで計算ができる。4 章では

$$\begin{aligned}\frac{\partial n(m)}{\partial t} = \frac{1}{2}\int_0^m & A(m', m-m')n(m')n(m-m')dm' \\ & -n(m)\int_0^\infty A(m', m)n(m')dm' \end{aligned} \tag{2}$$

という式を与えていた。ここでは離散系での計算を行なう。ある時刻 t に、m_1 単位でいくつか集まった km_1 の体積の中に n_k 個の天体があると考える。n_k を連続関数として扱うと、次の式で考えることができる。ただしここでは考えている系の中で m_1 の個数が保存されていて、別の系からの衝突や、破壊によって失われることがないとする。

$$\frac{\mathrm{d}n_k}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\sum_{i+j=k} A_{ij}n_i n_j - n_k \sum_{i=1}^{\infty} A_{ik}n_i \tag{3}$$

- 第 1 項: 質量 im_1 と jm_1 が単位時間あたりに降着して km_1 となる確率
- 第 2 項: 質量 km_1 が他の質量の天体と衝突して km_1 でなくなる確率

この方程式は一般には解析的に解くことができないが、特殊な核 A_{ij} によっては解くことができる。実際の解法は Appendix に載せてここでは結果のみを示す。また、初期条件として m_1 の質量を持つ天体は n_0 個あるとする。

- $A_{ij} = \alpha \quad (const.)$
  解は

$$n_k(t) = n_0 f^2 (1-f)^{k-1} \tag{4}$$

$$f = \frac{1}{1+\frac{1}{2}\alpha n_0 t} \tag{5}$$

  と求められる。$n_1(t) = n_0 f^2$ と書け、全体の個数を N とおくと $N(t) = n_0 f$ と表せることから全体の個数のうち、まだ 1 度も衝突をしていない天体の割合は f で表すことができる。図 1 に結果のグラフを示している。時間経過とともに質量の大きな天体は数が多くなるが、そのペースは一定で小さな天体の減少とともに増加するので全体として成長していることが分かる。これは秩序成長の解となっている。

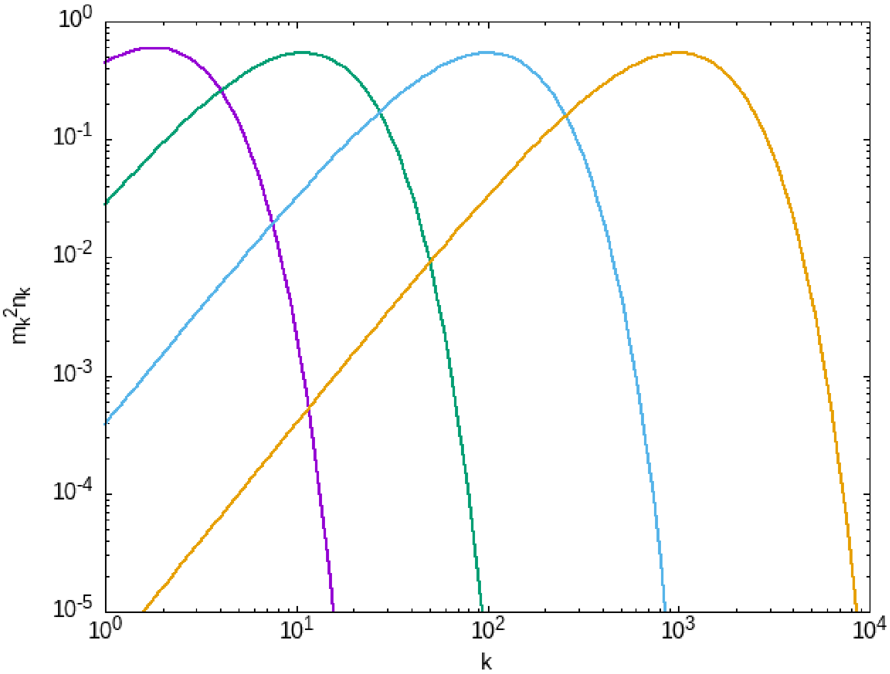

図 1　$A_{ij} = \alpha$ のときの Coagulation equation の解。横軸は k, すなわち単位 m_1 の質量を表す。縦軸は $k^2 n_k$ であり、横軸が対数のとき囲まれる面積が保存量になる。それぞれの線は $\alpha n_0 t = 1, 10, 100, 1000$ における値。

- $A_{ij} = \alpha(m_i + m_j)$
  解は

$$n_k(t) = n_0 \frac{k^{k-1}}{k!} f(1-f)^{k-1} \exp[-k(1-f)] \tag{6}$$

$$f = \exp[-\alpha n_0 t] \tag{7}$$

と求められる。

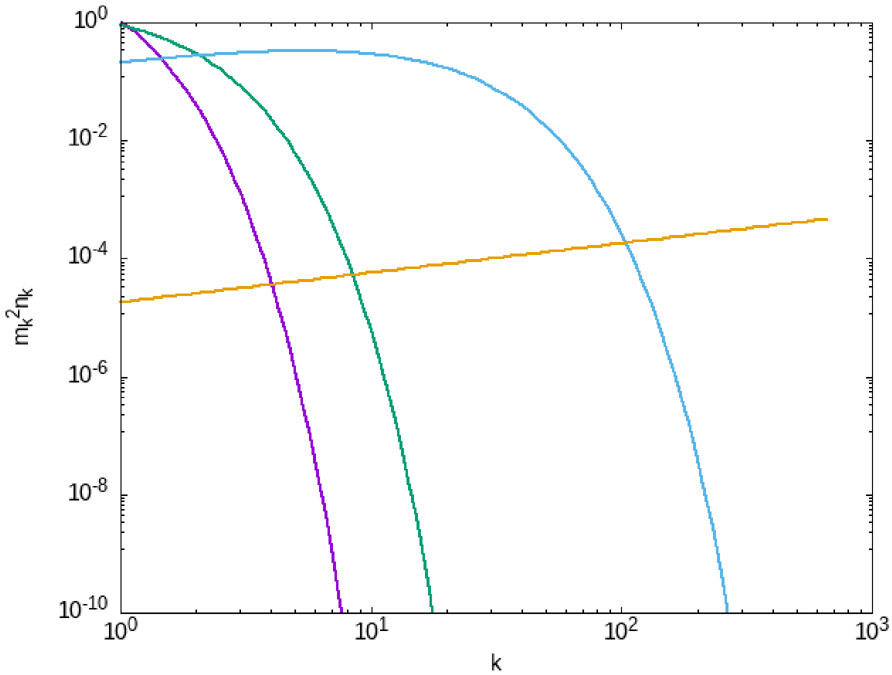

図 2　$A_{ij} = \alpha(m_i + m_j)$ のときの Coagulation equation の解。それぞれの線は $\alpha n_0 t = 0.01, 0.1, 1, 10$ における値。階乗は Stirling の公式で近似している。

- $A_{ij} = \alpha m_i m_j$
  解は

$$n_k(t) = n_0 \frac{(2k)^{k-1}}{k!k} \left(\frac{1}{2} \alpha n_0 t \right)^{k-1} \exp[-\alpha n_0 k t] \tag{8}$$

$$\tag{9}$$

と求められる。

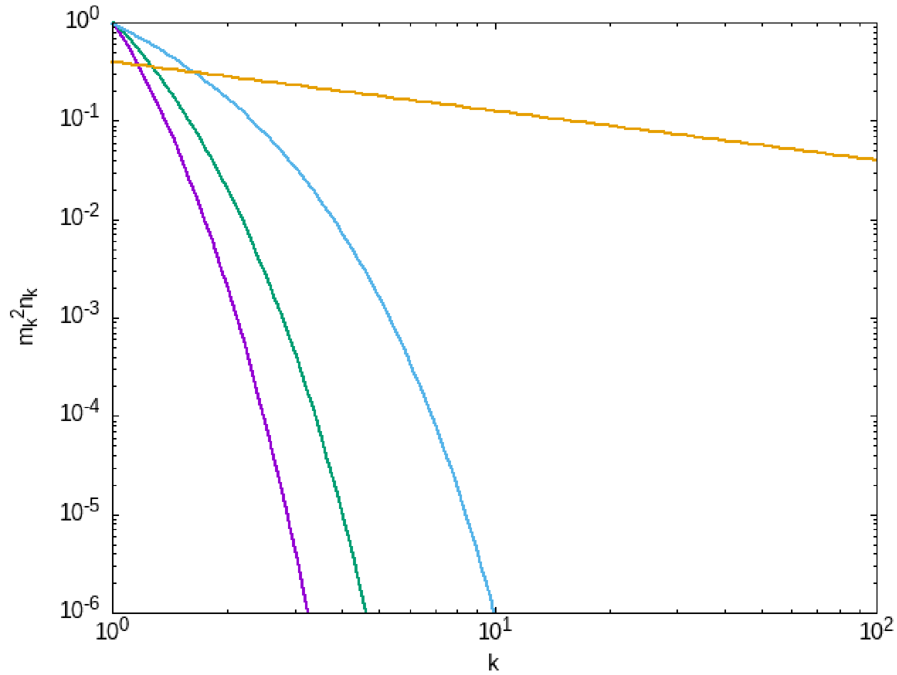

図 3　$A_{ij} = \alpha(m_i m_j)$ のときの Coagulation equation の解。それぞれの線は $\alpha n_0 t = 0.001, 0.01, 0.1, 1$ における値。

図 3 を見ると、大きな質量の所で $\alpha n_0 t = 1$ で exponential の減少からべき乗 (power-law) の減少に変わっていることが分かる。これは暴走成長であり、全ての天体が同じように成長する段階から一部の天体だけが急激に成長している段階に移ったことを表している。このように暴走成長が起きてしまうと n_k を連続関数として扱う ($n_k \gg 1$) という仮定が崩れてしまうので、Coagulation equation が記述できるのはここまでとなる。

実際には kernel は複雑な式をしているため解析的に解くことはできない。ただし以上の 3 つの例は秩序成長と暴走成長の例を示しているので、このような厳密な計算を用いても gravitational focusing の効果が大きかった惑星形成の初期では暴走成長が起こっていたと考えられる。実際に gravitational focusing が無視できる場合、衝突断面積は $A \propto R_s^2 \propto m^{2/3}$ であるが、重要な場合、すなわち暴走成長が引き起こされる場合は σ の m 依存性を無視すると $A \propto R_s^2 v_{esc}^2/\sigma^2 \propto m^{2/3+2/3}$ となる。kernelA_{ij} は質量 i, j どうしの衝突降着率を表しているのでおおよそ $A_{ij} \propto A$ である。したがって上で見た解析解 ($A \propto 1, m, m^2$) は秩序成長から暴走成長までを表していたと言える。

Appendix: Coagulation Equation の解析解の解法

ここでは Coagulation equation

$$\frac{\mathrm{d}n_k}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} \sum_{i+j=k} A_{ij} n_i n_j - n_k \sum_{i=1}^{\infty} A_{ik} n_i \tag{10}$$

の解析解 3 つを求める。初期条件として m_1 の質量を持つ天体は n_0 個あるとする。すなわち質量保存から

$$\sum_{i=1}^{\infty} i n_i(t) = n_0 \tag{11}$$

とする。

A.1 $A_{ij} = \alpha \quad (const.)$

方程式は

$$\frac{\mathrm{d}n_k}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} \alpha \sum_{i+j=k} n_i n_j - \alpha n_k \sum_{i=1}^{\infty} n_i \tag{12}$$

と書くことができる。両辺 k についての和をとるが、ここで時刻 t における全ての天体の数を

$$N(t) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} n_i(t) \tag{13}$$

と定義すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} N(t) = \frac{1}{2} \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i+j=k} n_i n_j - \alpha N^2 = -\frac{\alpha}{2} N^2 \tag{14}$$

と表せる。ここでは

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i+j=k} n_i n_j = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} n_i n_j = N^2 \tag{15}$$

を用いた。方程式の一般解は

$$N(t) = \frac{N(t=0)}{1 + (\alpha N(t=0) t/2)} = \frac{n_0}{1 + \alpha n_0 t/2} \tag{16}$$

と求められる。この解を用いると、n_1 は

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} = -\alpha n_1(t)N(t) \tag{17}$$

$$n_1(t) = \frac{n_0}{(1+\alpha n_0 t/2)^2} \tag{18}$$

となる。n_2 は

$$\frac{\partial n_2}{\partial t} = \frac{1}{2}\alpha n_1(t)^2 - \alpha n_2(t)N(t) \tag{19}$$

$$\tag{20}$$

の式となるが第 1 項が非同次項で同次方程式は n_1 と同じ式である。したがって定数変化法を用いて

$$n_2(t) = \frac{n'(t)}{(1+\alpha n_0 t/2)^2} \tag{21}$$

を微分方程式に代入することで $n'(t)$ が求まり

$$n_2(t) = \frac{n_0(\alpha n_0 t/2)}{(1+\alpha n_0 t/2)^3} \tag{22}$$

となる。n_1, n_2 からの類推で

$$n_k(t) = \frac{n_0(\alpha n_0 t/2)^{k-1}}{(1+\alpha n_0 t/2)^{k+1}} \tag{23}$$

となると考えられる。そこで $i = 1, 2, ..., k-1$ まで上式が成り立つものとして n_k を計算する。

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} = \frac{1}{2}\alpha(n_1(t)n_{k-1}(t) + ... + n_{k-1}(t)n_1(t)) - \alpha n_k(t)N(t) \tag{24}$$

$$= \frac{\alpha(k-1)}{2}\frac{n_0^2(\alpha n_0 t/2)^{k-2}}{(1+\alpha n_0 t/2)^{k+2}} - \alpha n_k(t)N(t) \tag{25}$$

n_2 での計算と同様にこれは非同次方程式なので

$$n_k(t) = \frac{n'_k(t)}{(1+\alpha n_0 t/2)^2} \tag{26}$$

を微分方程式に代入する。ここで簡単のために $\alpha n_0 t/2 = T$ と変換する。

$$
\begin{aligned}
n'_k(t) &= \int_0^t \frac{\alpha(k-1)}{2} \frac{n_0^2(\alpha n_0 t/2)^{k-2}}{(1+\alpha n_0 t/2)^k} dt && (27)\\
&= (k-1)n_0 \int_0^{\alpha n_0 t/2} \frac{T^{k-2}}{(1+T)^k} dT && (28)\\
&= (k-1)n_0 \left(\left[-\frac{1}{k-1} \frac{T^{k-2}}{(1+t)^{k-1}} \right]_0^T + \frac{k-2}{k-1} \int_0^T \frac{T^{k-3}}{(1+T)^{k-1}} dT \right) && (29)\\
&= -\frac{n_0 T^{k-2}}{(1+T)^{k-1}} + n'_{k-1}(t) && (30)\\
&= \frac{n_0 T^{k-1}}{(1+T)^{k-1}} && (31)
\end{aligned}
$$

と表せる。したがって

$$
n_k(t) = \frac{n_0(\alpha n_0 t/2)^{k-1}}{(1+\alpha n_0 t/2)^{k+1}} \tag{32}
$$

となり、数学的帰納法より $n_k(t)$ が求められた。

A.2 $A_{ij} = \alpha(m_i + m_j)$

$$
A_{ij} = \beta(i+j), \quad \beta = \alpha m_1 \tag{33}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} n_k(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i+j=k} \beta(i+j) n_i n_j - \beta n_k \sum_{i=1}^{\infty} (i+k) n_i && (34)\\
&= \frac{1}{2} \beta k \sum_{i+j=k} n_i n_j - \beta n_k (n_0 + kN(t)) && (35)
\end{aligned}
$$

として方程式を k について和をとると

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} N(t) &= \frac{1}{2} \beta \sum_k k \sum_{i+j=k} n_i n_j - \beta \sum_k n_k (n_0 + kN(t)) && (36)\\
&= \beta n_0 N(t) - \beta(N(t) n_0 + n_0 N(t)) && (37)\\
&= -\beta n_0 N(t) && (38)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\sum_k k \sum_{i+j=k} n_i n_j = \sum_{i=1} \sum_{j=1} (i+j) n_i n_j = 2 n_0 N(t) \tag{39}
$$

を用いた。このままでも解くことができるが、両辺を $N(0)=n_0$ で割って $\tau=\frac{1}{2}n_0 t$ で変数変換を行なう。すると $f=N(t)/n_0$ を用いて

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\tau}=-2\beta f \tag{40}$$

したがって

$$f(\tau)=e^{-2\beta\tau} \tag{41}$$
$$N(t)=n_0 e^{-\beta n_0 t} \tag{42}$$

となる。この式を用いると $n_1(t)$ の方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}n_1(t)=-\beta n_1(t)\sum_{i=1}^{\infty}(i+1)n_i=-\beta(N(t)+n_0)n_1(t) \tag{43}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}n_1(\tau)=-2\beta(1+e^{-2\beta\tau})n_1(\tau) \tag{44}$$

と表され、解くと

$$n_1(t)=n_0\exp\left[-2\beta\left(\tau+\frac{1-e^{-2\beta\tau}}{2\beta}\right)\right] \tag{45}$$
$$=n_0 f\exp[-(1-f)] \tag{46}$$

となる。前節と同様に数学的帰納法によって n_k を求める。式 (35) を見ると前節と同様に第 1 項が非同次項として考えることができる。したがって n_1 の計算と同様に

$$n_k(\tau)=n'_k(\tau)f\exp[-k(1-f)] \tag{47}$$

として代入すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}n'_k(\tau)=\frac{\beta}{n_0 f\exp[-k(1-f)]}k\sum_{i+j=k}n_i n_j \tag{48}$$

となる。ここで $i\geq k-1$ について

$$n_i=n_0\frac{k^{k-1}}{k!}f(1-f)^{k-1}\exp[-k(1-f)] \tag{49}$$

が成り立つとすると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}n'_k(\tau)=\beta n_0 f k(1-f)^{k-2}\sum_{i+j=k}\frac{i^{i-1}j^{j-1}}{i!j!} \tag{50}$$

$$=\beta n_0 f\frac{k}{k!}(1-f)^{k-2}\sum_{i}^{k-1}\binom{k}{i}i^{i-1}(k-i)^{k-i-1} \tag{51}$$

順番が前後するが、次節での計算より i における和は

$$\sum_{i}^{k-1} \binom{k}{i} i^{i-1}(k-i)^{k-i-1} = 2(k-1)k^{k-1} \tag{52}$$

と求められる。したがって

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} n'_k(\tau) = 2\beta n_0 f \frac{1}{k!}(1-f)^{k-2}(k-1)k^k \tag{53}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f} n'_k(f(\tau)) = -n_0 \frac{k^k}{k!}(k-1)(1-f)^{k-2} \tag{54}$$

これを解けば

$$n'_k(\tau) = n_0 \frac{k^k}{k!}(1-f)^{k-1} \tag{55}$$

となるので

$$n_k(t) = n_0 \frac{k^{k-1}}{k!} f(1-f)^{k-1} \exp[-k(1-f)] \tag{56}$$

と求められる。

A.3 $A_{ij} = \alpha m_i m_j$

$$A_{ij} = \gamma ij, \quad \gamma = \alpha m_1^2 \tag{57}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} n_k(t) = \frac{1}{2}\gamma \sum_{i+j=k} ij n_i n_j - \gamma n_k \sum_{i=1}^{\infty} ik n_i \tag{58}$$

$$= \frac{1}{2}\gamma \sum_{i+j=k} ij n_i n_j - \gamma n_0 k n_k \tag{59}$$

方程式を k について和をとると、$\tau = \gamma n_0 t$ として

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} N(t) = \frac{1}{2}\gamma \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i+j=k} ij n_i n_j - \gamma n_0 \sum_{k=1}^{\infty} k n_k \tag{60}$$

$$= \frac{1}{2}\gamma n_0^2 - \gamma n_0^2 = -\frac{1}{2}\gamma n_0^2 \tag{61}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} f(\tau) = -\frac{1}{2} \tag{62}$$

と表せる。したがって $f(0)=1$ より

$$f(\tau) = 1 - \frac{1}{2}\tau \tag{63}$$

$$N(t) = n_0\left(1 - \frac{1}{2}\gamma t\right) \tag{64}$$

となる。このとき

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}n_1(t) = -\gamma n_1(t)\sum_{i=1}^{\infty} i n_i = -\gamma n_0 n_1(t) \tag{65}$$

$$n_1(t) = n_0 e^{-\gamma n_0 t} = n_0 e^{-2(1-f)} \tag{66}$$

と求められる。一般の k について $f_k(t) = n_k(t)/n_0$ とおくと

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}f_k(\tau) = \frac{1}{2}\sum_{i+j=k} ij f_i(\tau) f_j(\tau) - k f_k(\tau) \tag{67}$$

さらに $g_k(\tau) \equiv e^{k\tau} f_k(\tau)$ とおくと

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}g_k(\tau) = e^{k\tau}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} + k\right) f_k(\tau) \tag{68}$$

と表せることから、解くべき方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}g_k(\tau) = \frac{1}{2}\sum_{i+j=k} ij g_i(\tau) g_j(\tau) \tag{69}$$

$g_k(\tau)$ の τ 依存性は $g_k(\tau) \propto \tau^{k-1}$ で与えられるものとする。係数を C_k とするとこの係数が満たすべき式は

$$C_k = \frac{1}{2(k-1)}\sum_{i+j=k} ij C_i C_j \tag{70}$$

$$C_1 = 1 \tag{71}$$

となる。さらに $D_k = kC_k$ とおくと

$$D_k = \frac{k}{2(k-1)}\sum_{i+j=k} D_i D_j \tag{72}$$

$$= \frac{1}{2(k-1)}\sum_{i=1}^{k-1}\{i + (k-i)\} D_i D_{k-i} \tag{73}$$

$$= \frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} i D_i D_{k-i} \tag{74}$$

$$D_1 = 1 \tag{75}$$

となる。この式を満たす D_k は $\frac{k^{k-1}}{k!}$ である。これを数学的帰納法で示す。$i=1,2,...,k-1$ まではこの式が成り立っているものとして

$$D_k = \frac{1}{(k-1)}\sum_{i=1}^{k-1} i\frac{i^{i-1}(k-i)^{k-i-1}}{i!(k-i)!} \tag{76}$$

$$= \frac{1}{(k-1)k!}\sum_{i=1}^{k-1} {}_kC_i i^i (k-i)^{k-i-1} \tag{77}$$

$$= \frac{1}{(k-1)k!}\sum_{i=1}^{k-1} {}_kC_i \sum_{j=0}^{i} {}_iC_j k^j (-1)^{i-j}(k-i)^{k-j-1} \tag{78}$$

最後の等号では i^i を和に置き換えた。$i=k-m$ とおくと ${}_kC_i = {}_kC_{k-m} = {}_kC_m$ より

$$k!(k-1)D_k = \sum_{m=1}^{k-1}(-1)^{k-m}{}_kC_m \sum_{j=0}^{k-m}(-1)^j {}_{(k-m)}C_j k^j m^{k-j-1} \tag{79}$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^j k^j \sum_{m=1}^{k-j}(-1)^{k-m}\binom{k}{m}\binom{k-m}{j}m^{k-j-1} + \sum_{m=1}^{k-1}\binom{k}{m}(-1)^{k-m}m^{k-1} \tag{80}$$

$j \geq 1$ と $j=0$ の項に分けた。さらに

$$\binom{k}{m}\binom{k-m}{j} = \binom{k}{j}\binom{k-j}{m} \tag{81}$$

より

$$k!(k-1)D_k = \sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}k^j \sum_{m=1}^{k-j}(-1)^m\binom{k-j}{m}m^{k-j-1} + \sum_{m=1}^{k-1}\binom{k}{m}(-1)^{k-m}m^{k-1} \tag{82}$$

ここで一般に $n \geq 2$ で

$$\sum_{r=1}^{n}(-1)^r r^{n-1}\binom{n}{r} = 0 \tag{83}$$

となることを用いると、式 (82) の $j \neq k-1$ における第 1 項の m についての和は 0 となる。式 (83) は $(1-x)^n$ の微分を考えることで証明できる (省略)。第 2 項も適用できるよ

うに、$m = k$ の項 $(= k^{k-1})$ を入れると、

$$k!(k-1)D_k = (-1)\binom{k}{k-1}k^{k-1}(-1)\binom{k-(k-1)}{1} - (k-1)^{k-1} \tag{84}$$
$$= k^k - k^{k-1} = (k-1)k^{k-1} \tag{85}$$

したがって

$$D_k = \frac{k^{k-1}}{k!} \tag{86}$$

となることが確かめられた。以上より解は

$$n_k(\tau) = f_k(\tau)n_0 = n_0\big(e^{-k\tau}g_k(\tau)\big) \tag{87}$$
$$= n_0 e^{-k\tau}\frac{D_k}{k}\tau^{k-1} \tag{88}$$
$$n_k(t) = n_0 e^{-k\gamma n_0 t}\frac{k^{k-1}}{k!k}(\gamma n_0 t)^{k-1} \tag{89}$$

と求められる。

参考文献

[1] Philip J. Armitage. *Astrophysics of Planet Formation.* Cambridge University Press, 2 edition, 2020.