

Astrophysics of Planet Formation[1]

C1SB2064 辻 勇吹樹

2024年6月14日

6.1.1 Core/Envelope Structure

envelope を記述する方程式

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \quad (1)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \quad (2)$$

$$\frac{dT}{dr} = \begin{cases} -\frac{3\kappa_{R\rho}}{16\sigma T^3} \frac{L}{4\pi r^2} & (\text{radiative}) \\ \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \left(\frac{\partial P}{\partial r}\right) & (\text{convective}) \end{cases} \quad (3)$$

対流安定の条件

$$\nabla_{rad} < \nabla_{ad} + \frac{\varphi}{\delta} \nabla_{\mu} \quad (4)$$

境界条件

- 内側

$$r = R_S, M = M_{core} \quad (5)$$

- 外側: 以下の小さい方
降着半径

$$r_{acc} = \frac{GM_p}{c_s^2} \quad (6)$$

ヒル半径

$$r_H = \left(\frac{M_p}{3M_*}\right)^{1/3} a \quad (7)$$

本節では、巨大ガス惑星の外層 (envelope) を記述する式や安定性、境界条件について調べる。自転を考えない球対称系をとる。コアと外層の質量をそれぞれ M_{core}, M_{env} すると全質量 M と

$$M = M_{core} + M_{env} \quad (8)$$

という関係が与えられる。外層が静水圧平衡 + 熱平衡 (=完全平衡) にあるときは

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (\text{Conservation of mass}) \quad (9)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \rho \quad (\text{Conservation of momentum}) \quad (10)$$

という関係が与えられる。 $M = M(r)$ は半径 r の中に含まれる質量である (enclosed mass)。 P と ρ の関係は一般にはポリトロープ ($P = K\rho^\gamma$) のように 1 対 1 の関係ではなく、温度も含まれる。したがって上の 2 つの式で閉じておらず、温度を決める式が必要になる。星の進化を記述する基礎方程式には「エネルギー輸送」の式も含まれている。

$$\frac{dT}{dr} = \begin{cases} -\frac{3\kappa_R \rho}{16\sigma T^3} \frac{L}{4\pi r^2} & (\text{radiative}) \\ \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \left(\frac{\partial P}{\partial r}\right) & (\text{convective}) \end{cases} \quad (11)$$

放射輸送のときの式を Appendix で復習している。惑星における光度 L は、主に微惑星の衝突による。したがって温度勾配は惑星コア表面で急になっている。あまりに勾配が急になると、対流不安定が発生してかき混ぜられ、温度勾配は別の式 (断熱温度勾配) で記述されることになる。そこでこの対流不安定となる条件を求める。

図 6.3 に示されるように、対流は大気が上向きに向かう軽い塊と、下向きに向かう重い流れに別れた時に起こる。これをより分かりやすくするために空気塊と外層の密度勾配をそれぞれ $(d\rho/dr)_b$, $(d\rho/dr)_{env}$ と定義する。今、空気塊が r から $r + \Delta r$ だけ動いた時に働く浮力 K_r は

$$K_r = -g \left[\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_b - \left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{env} \right] \Delta r \quad (12)$$

と表される。 $\Delta r > 0$ のとき、空気塊が外層よりも重い、すなわち

$$\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_b - \left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{env} > 0 \quad (13)$$

ならばまた下に戻っていくことになる。一方で上式が負である場合、空気塊は更に上昇を続けてしまい、これを対流不安定とよぶ。特に空気塊が断熱的に、圧力平衡で上昇する場合は添字を断熱温度勾配 ad に変えることができる。圧力平衡は空気塊が周りの環境と相互作用する速度、すなわち音速よりもゆっくり運動することで満たすことができる。

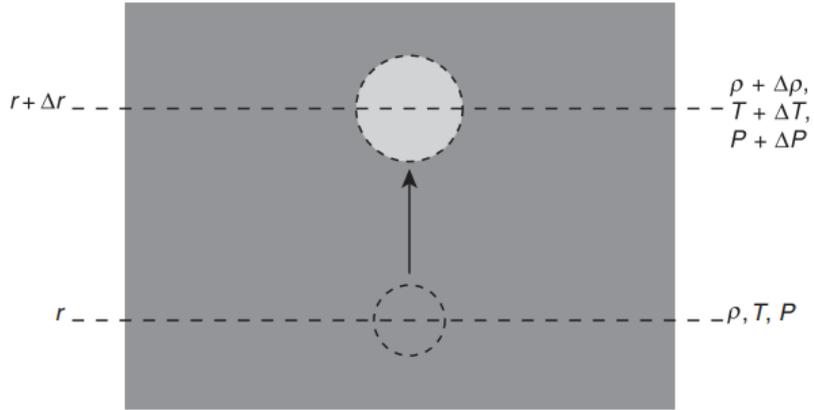


Figure 6.3 To assess the stability of the planetary envelope to convective instability, we imagine displacing a notional blob of fluid from r to $r + \Delta r$ under adiabatic conditions. Stability requires that the displaced fluid be denser than its new surroundings.

対流不安定が起こる条件をより詳しく見るために、条件式を書き換えることを考える。 $\rho = \rho(P, T, \mu)$ として (μ は化学ポテンシャルではなく分子量)

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha \frac{dP}{P} - \beta \frac{dT}{T} + \varphi \frac{d\mu}{\mu} \quad (14)$$

と表され、ここで

$$\alpha \equiv \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P} \right)_{T, \mu} \quad (15)$$

$$\beta \equiv - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_{P, \mu} \quad (16)$$

$$\varphi \equiv \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln \mu} \right)_{P, T} \quad (17)$$

であり、これらは状態方程式で決まる量になっていて理想気体では全て 1 になる。式 (14) を用いて対流安定の条件を書き直すと

$$\left(\frac{\alpha}{P} \frac{dP}{dr} \right)_b - \left(\frac{\beta}{T} \frac{dT}{dr} \right)_b > \left(\frac{\alpha}{P} \frac{dP}{dr} \right)_{env} - \left(\frac{\beta}{T} \frac{dT}{dr} \right)_{env} + \left(\frac{\varphi}{\mu} \frac{d\mu}{dr} \right)_{env} \quad (18)$$

となる。ここで空気塊を持ち上げても分子量は変わらないことを用いた。また左辺と右辺

のそれぞれ第 1 項は圧力平衡のもとでは打ち消される。また温度や分子量の勾配を

$$\nabla \equiv \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_b \quad (19)$$

$$\nabla_{env} \equiv \left(\frac{d \ln T}{d \ln P} \right)_{env} \quad (20)$$

$$\nabla_{\mu} \equiv \left(\frac{d \ln \mu}{d \ln P} \right)_{env} \quad (21)$$

と定義して、両辺に $-P(dr/dP)$ をかけることで対流安定の条件は

$$\nabla_{env} < \nabla + \frac{\varphi}{\delta} \nabla_{\mu} \quad (22)$$

$$(23)$$

とまとめることができる。ここでの議論では温度勾配が熱輻射 (radiation) によってだけで決まることを仮定していた。この場合

$$\nabla_{env} \rightarrow \nabla_{rad} = \frac{3\kappa_R LP}{64\pi\sigma GMT^4} \quad (24)$$

となり、空気塊が断熱的に動くことも仮定すると、対流安定の条件 [Ledoux criterion]

$$\nabla_{rad} < \nabla_{ad} + \frac{\varphi}{\delta} \nabla_{\mu} \quad (25)$$

が導かれる。また化学組成が一樣の場合の条件 [Schwarzschild criterion] は

$$\nabla_{rad} < \nabla_{ad} \quad (26)$$

となる。対流のモデルは”mixing-length” theory が知られているが、対流が起きると多くの場合で非常に効率よくエネルギーが輸送されて不安定な急激な温度勾配が打ち消される。そこで対流が起きた場合は $\nabla_{env} \rightarrow \nabla_{ad}$ とすることで外層モデルの良い近似となる。

2 つの微分方程式と温度勾配の式をこれまでに与えたが、さらに状態方程式 ($P = P(\rho, T, \mu)$) やロスランド平均 κ_R 、光度、適切な境界条件を与えることで解くことができる。星の場合は光度をエネルギー保存 ($\partial l / \partial m$) の式で与えることができる。今回の巨大ガス惑星の場合は微惑星との衝突で決まるので

$$L \simeq \frac{GM_{core} \dot{M}_{core}}{R_s} = const. \quad (27)$$

とみなすことができる。外層の内側の境界条件は $r = R_s, M = M_{core}$ とできる。一方で外側の境界条件は恣意的に決める必要がある。以下に述べる 2 つの条件のうち小さい方を選ぶことにする。

- 降着半径 r_{acc}

円盤内のガスの脱出速度が音速になるときの半径。

$$r_{acc} = \frac{GM_p}{c_s^2} \quad (28)$$

- ヒル半径ケプラー円盤の shear によって惑星重力から引き剥がされる半径。

$$r_H = \left(\frac{M_p}{3M_*} \right)^{1/3} a \quad (29)$$

すなわち

$$r_{out} = \min(r_{acc}, r_H) \quad (30)$$

となる。境界条件は $M = M_p, P = P_{disk}, T \simeq T_{disk}$ となる。温度 T は厳密にはコア表面からの熱輸送によって円盤温度よりも大きくなる。

Appendix: エネルギー輸送方程式

拡散近似を行なう。すなわち流束 \mathbf{j} と数密度 n について

$$\mathbf{j} = -D\nabla n \quad (31)$$

$$D = \frac{1}{3}vl_p \quad (32)$$

が成り立つとする。 D は粒子のランダム運動で決まる拡散係数、 l_p は平均自由行程である。これを光子のエネルギー輸送に適用する。Stefan-Boltzmann の法則より

$$U = aT^4 \quad (33)$$

となるのでこれを用いるとエネルギー流束 F について

$$F = -\frac{1}{3}cl_p \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{4}{3}ac \frac{T^3}{\kappa\rho} \frac{\partial T}{\partial r} \quad (34)$$

となる。この式を温度勾配について解き、 $L = 4\pi r^2 F$ を使うと

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{3\kappa\rho}{16\sigma T^3} \frac{L}{4\pi r^2} \quad (35)$$

となり、エネルギー輸送の式が導かれた。恒星内部のように bf,ff 吸収が優勢のときは Kramers の法則から $\kappa \propto \rho T^{-3.5}$ となる。

参考文献

- [1] Philip J. Armitage. *Astrophysics of Planet Formation*. Cambridge University Press, 2 edition, 2020.