

Astrophysics of Planet Formation[2]

C1SB2064 辻 勇吹樹

2024年6月22日

6.2 Constraints on the Interior Structure of Giant Planets

観測による巨大惑星の形成モデルの制限

太陽系惑星の重力場や、系外惑星の分布を観測することで形成モデルとの整合性を調べることができる。

重力場をルジャンドル多項式で展開した式

$$\Phi(r, \theta) = \frac{GM_p}{r} \left[1 - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{R_{eq}}{r} \right)^{2i} J_{2i} P_{2i}(\cos \theta) \right] \quad (1)$$

のそれぞれの重力モーメント J_{2i} を観測することで星表層から中心のそれぞれの領域における質量分布を決めることができる。木星はこうした観測から He poor/rich の envelope と dilute/dense なコアの 4 層に分けられるモデルが整合的になっている。ただし高圧での状態方程式がわかっておらず、コアの質量には未だ大きな不定性がある。

コア集積モデルは太陽系の観測によって制限をかけることができる。重力場の測定によって状態方程式や大気組成の知識を使って太陽系の巨大惑星の内部構造のモデルを組み立てることができる。

一方系外惑星の個々の測定では強い制限をかけることができない。実際に巨大惑星の質量-半径の関係 (mass-radius relation) は重元素の総量に依存するが、その分布にはあまり依らない。したがって質量と半径の測定ではモデルと比較することが難しい。ただし系外惑星の分布モデルを考えるうえでは有効である。例えば中心星の金属量と巨大惑星の数は定性的にコア集積の予測と一致しており、定量的にも調査されうる。1.8.4 節で述べられ

ているように、分子雲コアに含まれる重元素のほとんどは中心星が食べる。円盤のガス質量が金属量に強く依存しないならば、星表面の金属量は当時のガスの量を示しているためそれに応じて作られる惑星の数も増える。

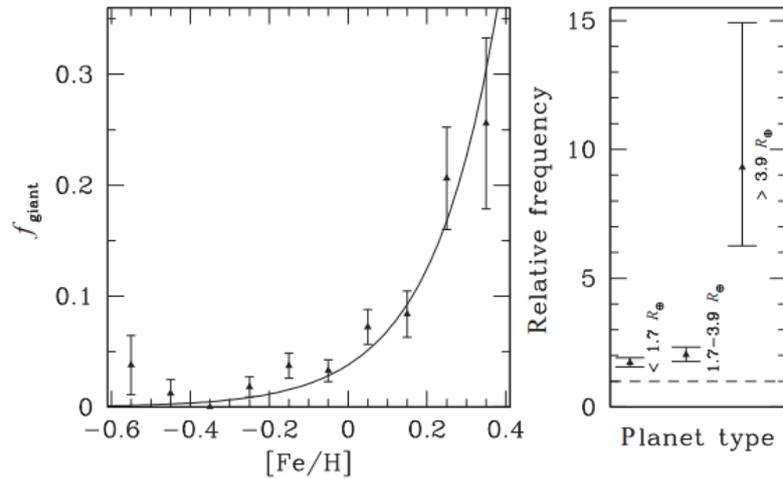


Figure 1.18 Left panel: the fraction of a sample of stars that host known giant extrasolar planets (using data from Sousa *et al.*, 2011). Right panel: the enhancement to the observed planet frequency for planets of different radii, corresponding approximately to super-Earths, mini-Neptunes, and gas giants. Note that astronomical convention is to measure the abundance of heavy elements relative to hydrogen, with the resulting ratio being normalized to the ratio found in the Sun. A logarithmic scale is used, denoted by square brackets. Thus, a star with “[Fe/H] = 0” has the same fractional abundance of iron as the Sun, whereas one with [Fe/H] = 0.5 is enriched in iron by a factor ~ 3 as compared to the Sun.

図1 1.8.4節で紹介された、中心星の金属量とその星の周りの惑星のうち巨大惑星の割合を示した図。右図は各惑星半径ごとの軌道周波数を表している。

6.2.1 Interior Structure from Gravity Field Measurements

星は軸をもって自転しているため、星はおよそ軸対称な形状、質量分布をしている。天体内部の構造によって重力場は軸対称を保ちつつ変化するため、この重力場の測定によって内部構造のモデルと比較することができる。重力場は軸対称性より以下のようにルジャ

ンドル多項式で展開することができる。

$$\Phi(r, \theta) = \frac{GM_p}{r} \left[1 - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{R_{eq}}{r} \right)^{2i} J_{2i} P_{2i}(\cos \theta) \right] \quad (2)$$

左辺第 1 項だけであれば球対称の重力である。 R_{eq} は惑星の赤道半径、 J_{2i} は重力モーメントと呼ばれる展開係数である。ルジャンドル多項式は図 2 に図示されるような関数である。重力場は軸対称であることに加えて赤道面からの上下対称性もあるので、多項式は偶数次のみをとっている。厳密には奇数次の項、また経度依存性を考慮した球面調和関数の展開が必要になり、Iess et al(2018)[4] では木星におけるそれらの展開係数の測定も行なっている。測定結果は図 3 に載せているが、双極子成分が他の項よりも 20 倍以上大きく、奇数次、特に球面調和関数の係数はほとんど 0 であることが分かる。奇数次の項は木星深部に流れる zonal flow(帯状風) に依る。Iess et al(2018) の論文では重力の南北非対称性を指摘している。これらの観測は Cassini や JUNO 探査機で行われてきた。

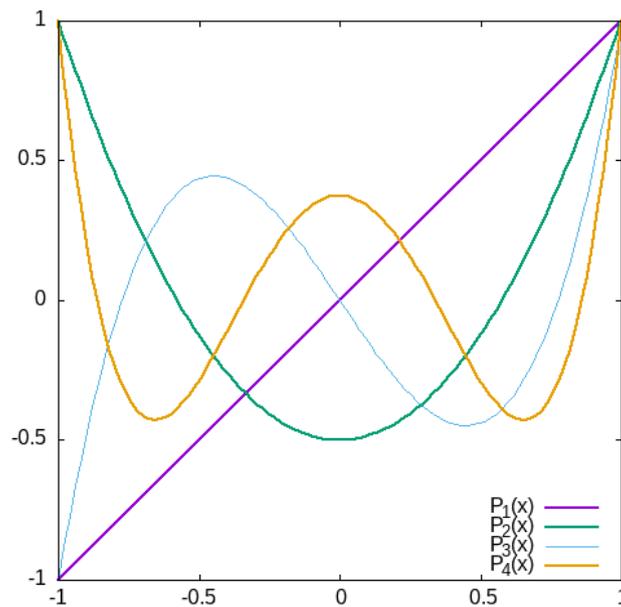


図 2 ルジャンドル多項式。偶数次は偶関数、奇数次は奇関数である。

Table 1 | Gravity solution

	Value	Uncertainty
$J_2 (\times 10^{-6})$	14,696.572	0.014
$C_{21} (\times 10^{-6})$	-0.013	0.015
$S_{21} (\times 10^{-6})$	-0.003	0.026
$C_{22} (\times 10^{-6})$	0.000	0.008
$S_{22} (\times 10^{-6})$	0.000	0.011
$J_3 (\times 10^{-6})$	-0.042	0.010
$J_4 (\times 10^{-6})$	-586.609	0.004
$J_5 (\times 10^{-6})$	-0.069	0.008
$J_6 (\times 10^{-6})$	34.198	0.009
$J_7 (\times 10^{-6})$	0.124	0.017
$J_8 (\times 10^{-6})$	-2.426	0.025
$J_9 (\times 10^{-6})$	-0.106	0.044
$J_{10} (\times 10^{-6})$	0.172	0.069
$J_{11} (\times 10^{-6})$	0.033	0.112
$J_{12} (\times 10^{-6})$	0.047	0.178
k_{22}	0.625	0.063
$\alpha (^{\circ})$	268.0570	0.0013
$\delta (^{\circ})$	64.4973	0.0014

Jupiter's gravity harmonics coefficients (unnormalized; reference radius 71,492 km), the Love number k_{22} and the pole coordinates (α , right ascension; δ , declination) at epoch J2017.0, obtained from the PJ3 and PJ6 Juno science orbits. The deviation of the principal axis of inertia from the spin axis, as inferred from the uncertainty in $C_{21} = \text{Re}(U_{21})\sqrt{5/3}$ and $S_{21} = \text{Im}(U_{21})\sqrt{5/3}$, is smaller than about 0.4 arcsec (130 m at the reference radius). J_2 includes a tidal term currently estimated at about 2.98×10^{-8} . The associated uncertainties are realistic values that can be used for analysis and interpretation and correspond to three times the formal 1σ uncertainties.

図 3 Iess et al(2018)[4] の木星の重力場測定の結果。 J はルジャンドル多項式の係数、 C, S は球面調和関数の係数である。

補足: 地磁気も同様にルジャンドル展開ができるが、永年変化によって係数が時間変化するため IGRF(international geomagnetic reference field) では 5 年毎に更新したものを公開している。地磁気は双極子成分 ($i = 2$) が他の項よりも 15 倍以上大きい。

展開係数は以下の式のようにして求めることができる。

$$J_{2i} = -\frac{1}{M_p R_{eq}^{2i}} \int \rho r^{2i} P_{2i}(\cos \theta) dV \quad (3)$$

したがってそれぞれのモーメントを測定することで密度分布を決めることができる。より高次のモーメントの計算では表面に近づくにつれて大きな積分となるため、それぞれのモーメントの計算で惑星の各領域における密度分布を与えることができる。図 (4) には実際に木星で重力モーメントがどの位置で寄与しているかを示している [3]。木星では合計質量、半径、表面での回転速度、 J_8 までの精度の良いモーメント、大気組成が我々の知る武器であり、これらと合致するようなコアのモデルや状態方程式を構築しなければならない。

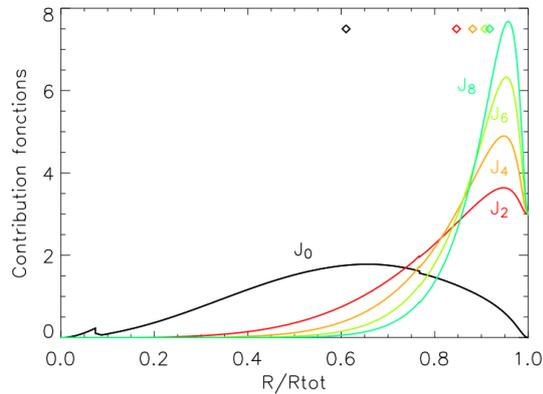


Figure 8: Contribution of the level radii to the gravitational moments of Jupiter. J_0 is equivalent to the planet's mass. The small discontinuities are caused by the following transitions, from left to right: core/envelope, helium rich/helium poor (metallic/molecular). Diamonds indicate the median radius for each moment.

図4 Guillot and Gautier(2007)[3]による、木星における重力モーメント J_{2i} の半径ごとの寄与の分布。

6.2.2 Internal Structure of Jupiter

図 6.6 は木星の、観測と整合的な内部構造のモデルである。このモデルでは以下の 4 層に分けられる。

- He-poor の envelope
H₂ 分子が多い。
- He-rich の envelope
金属水素 (水素の縮退状態) が含まれる。
- 密度の小さなコア
金属水素や重元素の混合状態。
- 密度の大きなコア
氷や岩石からなり、外側に向かって溶け出している。

詳細な重力場の測定によってモデルは以前のものと比べて進歩しているが、高圧における状態方程式の理論に不確かさが残っている。コア領域における重元素の質量は $7 - 25M_{\oplus}$ と見積もられている。内部の縮退度によって重元素の分布は大きく変化し、密度の小さな (dilute) な層が大きいほど大きな重元素量に対応している。地球や太陽での地震 (日震学) による内部構造の調査ができない限り、外の情報だけで内部深くの構造を決めることは根

本的な難しさがある。現在のデータはコア集積モデルと一致するが、他のモデルを棄却できるほどには至っていない。

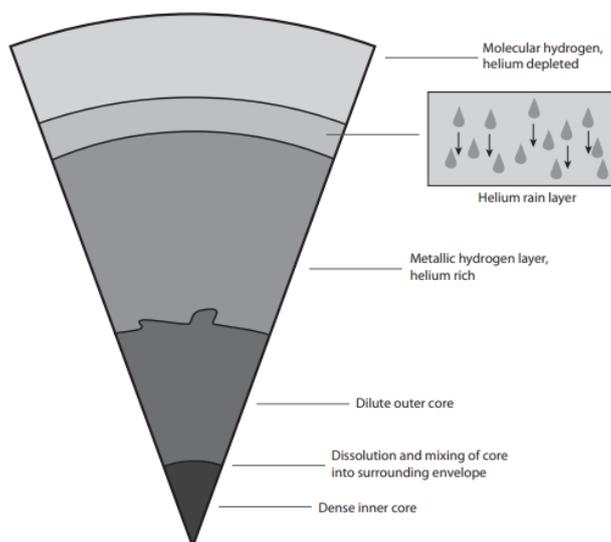


Figure 6.6 An example of an interior structure model that is compatible with *JUNO* measurements of Jupiter's gravitational field (based on Wahl *et al.*, 2017).

図 5

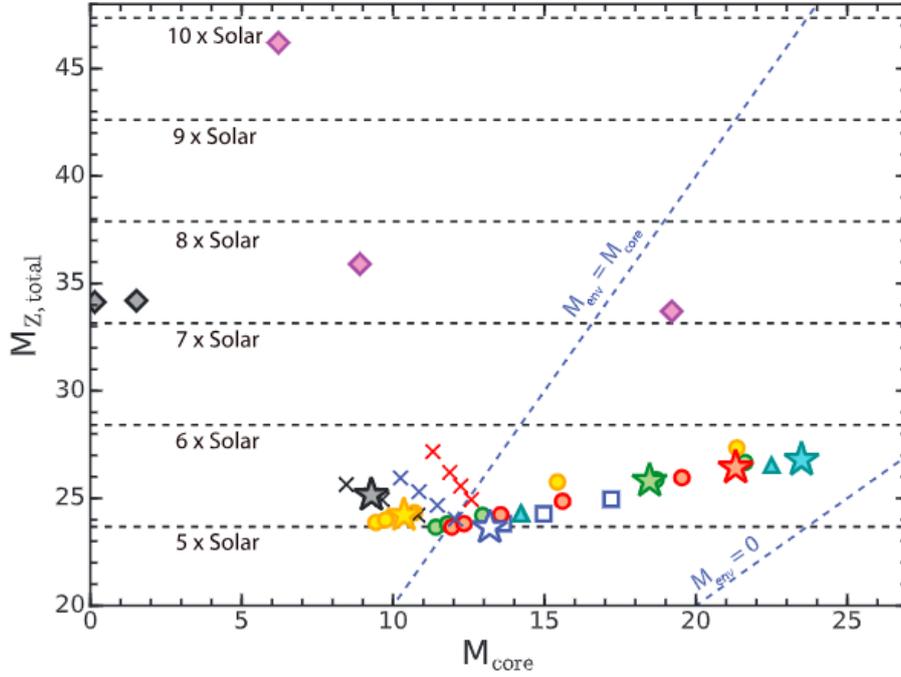


Figure 3. Mass of heavy elements in the core of the model versus the total heavy element mass in Jupiter predicted by the model. Symbols refer to identical models as in Figure 2. The stars denote models included in Table 1. Horizontal lines display the values of $M_{Z, \text{total}}$ corresponding to 5–10 times solar abundance of heavy elements.

図6 Iess et al(2018)[4]での木星のコア質量と重元素質量のモデルごとの分布。それぞれのマークがモデルの違いを表している。

Appendix: 重力場の展開係数の求め方

もう一度重力場の式を書いておく。

$$\Phi(r, \theta) = \frac{GM_p}{r} \left[1 - \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{R_{eq}}{r} \right)^{2i} J_{2i} P_{2i}(\cos \theta) \right] \quad (4)$$

$J_0 = -1$ として右辺第1項も展開式に入れ込むと

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{GM_p}{r} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{R_{eq}}{r} \right)^{2i} J_{2i} P_{2i}(\cos \theta) \quad (5)$$

ポアソン方程式 $\nabla^2\Phi(r, \theta) = -4\pi G\rho(r, \theta)$ の積分系を用いる。すなわち

$$\Phi(r, \theta) = G \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (6)$$

となる。ここで多重極展開を行なう。

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{r'}{r}\right) \cos\theta + \left(\frac{r'}{r}\right)^2}} \quad (7)$$

より (r'/r) のべき級数展開を行なうと、上式の右側がルジャンドル多項式の母関数であるから

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^i P_i(\cos\gamma') \quad (8)$$

となる。 γ' は r から r' までの角度である。したがって重力ポテンシャルは

$$\Phi(r, \theta) = G \int \frac{\rho(r', \theta')}{r} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^i P_i(\cos\gamma') dr' \quad (9)$$

$$= G \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{r^{i+1}} \int \rho(r', \theta') r'^i P_i(\cos\gamma') dr' \quad (10)$$

と表すことができる。ただしこの式には θ 方向の依存性が見えなくなっている。 θ は惑星の z 軸方向から r 方向への角度を示し、 γ' は惑星内の r' 方向から r 方向への角度を示している。そこで次の Appendix で証明するルジャンドル多項式の加法定理を用いる。すなわち θ' を z 軸方向から r' 方向までの角度とすれば

$$P_n(\cos\gamma') = P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta') + 2 \sum_{m=0}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta') \cos[m(\phi - \phi')] \quad (11)$$

が成り立つ。式 (10) にこの加法定理を代入すると ϕ の積分より第 1 項しか残らないことが分かる。したがって

$$\Phi(r, \theta) = G \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{r^{i+1}} \int \rho(r', \theta') r'^i P_i(\cos\theta') dr' P_i(\cos\theta) \quad (12)$$

となる。今回の系では上下対称性もあるので i が偶数次のみをとるとして、式 (5) と比較すると、ルジャンドル多項式の正規直交性より展開係数 J_{2i} は

$$J_{2i} = -\frac{1}{M_p R_{eq}^{2i}} \int \rho r^{2i} P_{2i}(\cos\theta) dV \quad (13)$$

が成り立つ。

Appendix: ルジャンドル多項式の加法定理

このサイト [1] を参考にした。前の Appendix での \mathbf{r}, \mathbf{r}' をベクトルに書くと

$$\overrightarrow{OP} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (14)$$

$$\overrightarrow{OQ} = (\sin \theta' \cos \phi', \sin \theta' \sin \phi', \cos \theta') \quad (15)$$

の和が γ' になる。したがって

$$\cos \gamma' = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} \quad (16)$$

$$= \sin \theta \cos \phi \sin \theta' \cos \phi' + \sin \theta \sin \phi \sin \theta' \sin \phi' + \cos \theta \cos \theta' \quad (17)$$

$$= \sin \theta \sin \theta' (\cos \phi \cos \phi' + \sin \phi \sin \phi') + \cos \theta \cos \theta' \quad (18)$$

$$= \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') + \cos \theta \cos \theta' \quad (19)$$

と表される。ここでルジャンドル多項式と陪多項式の関係式

$$P_n(\cos \gamma') = \sum_{m=0}^n (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta) \quad (20)$$

が成り立つことを用いる。証明は紹介したサイトを見ていただければと思うが、ルジャンドル多項式を陪多項式で展開した式となっている。

係数 A_m, B_m を求める。式の両辺に $P_n^{m'} \cos m'\phi \sin \theta$ をかけて θ, ϕ で積分すると、まず左辺は

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi P_n(\cos \gamma) P_n^{m'}(\cos \theta) \cos m'\phi \sin \theta d\theta = 2\pi \frac{2}{2n+1} P_n^{m'}(\cos \theta') \cos m'\phi' \quad (21)$$

とまとめられる。ここで n 次の球面調和関数 $f_n(\theta, \phi)$ について、多項式の直交性や、全方向で積分するため極をとりかえられることなどから

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi f_n(\theta, \phi) P_n(\cos \gamma') \sin \theta d\theta = 2\pi \cdot \frac{2}{2n+1} f_n(\theta', \phi') \quad (22)$$

が成り立つことを用いた。一方右辺は陪多項式の直交性から

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sum_{m=0}^n (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta) P_n^{m'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (23)$$

$$= \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m')!}{(n-m')!} \int_0^{2\pi} d\phi (A_{m'} \cos^2 m'\phi + B_{m'} \sin m'\phi \cos m'\phi) \quad (24)$$

となる。積分のうち $B_{m'}$ の項は落ち、 $A_{m'}$ の項は

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 m' \phi d\phi = \begin{cases} \pi & m' \neq 0 \\ 2\pi & m' = 0 \end{cases} \quad (25)$$

となるので

$$\text{右辺} = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{(n+m')!}{(n-m')!} A_{m'} (1 + \delta_{m',0}) \quad (26)$$

となる。左辺と右辺の結果を組み合わせることで

$$A_m = 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{P_n^m(\cos \theta') \cos m\phi'}{1 + \delta_{m',0}} \quad (27)$$

$$= \begin{cases} P_n(\cos \theta) & m = 0 \\ 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta') \cos m\phi' & m \neq 0 \end{cases} \quad (28)$$

と求められる。 B_m についても同様に両辺に $P_n^{m'}(\cos \theta) \sin m'\phi \sin \theta$ をかけて積分していくことで求められる。

$$B_m = \begin{cases} 0 & m = 0 \\ 2 \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta') \sin m\phi' & m \neq 0 \end{cases} \quad (29)$$

求められた係数を式 (20) に代入すると

$$\begin{aligned} P_n(\cos \gamma') &= P_n(\cos \theta') P_n(\cos \theta) \\ &+ 2 \int_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta') (\cos m\phi' \cos m\phi + \sin m\phi' \sin m\phi) P_n^m(\cos \theta) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} &= P_n(\cos \theta') P_n(\cos \theta) \\ &+ 2 \int_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta') P_n^m(\cos \theta) \cos m(\phi' - \phi) \end{aligned} \quad (31)$$

となり、ルジャンドル多項式の加法定理が導かれる。特に $n = 1$ とすると、 $P_1(x) = x$, $P_1^1(x) = \sqrt{1-x^2}$ より三角関数の加法定理 (式 (19)) が現れる。

また球面調和関数 Y_{nm} を用いて

$$P_n(\cos \gamma') = \frac{2n+1}{4\pi} \sum_{m=-n}^n Y_{nm}(\theta, \phi) Y_{nm}^*(\theta', \phi') \quad (32)$$

と表すこともできる。

参考文献

- [1] ルジャンドル多項式の加法定理. https://ieyasu03.web.fc2.com/PhysicsMath/25-Legendre_add.html. (Accessed on 06/21/2024).
- [2] Philip J. Armitage. *Astrophysics of Planet Formation*. Cambridge University Press, 2 edition, 2020.
- [3] Tristan Guillot and Daniel Gautier. Giant planets. *Treatise of Geophysics, vol. 10, Planets and Moons*, pages 439–464, 2007.
- [4] Luciano Iess, WM Folkner, D Durante, M Parisi, Y Kaspi, E Galanti, Tristan Guillot, WB Hubbard, DJ Stevenson, JD Anderson, et al. Measurement of jupiter ' s asymmetric gravity field. *Nature*, 555(7695):220–222, 2018.