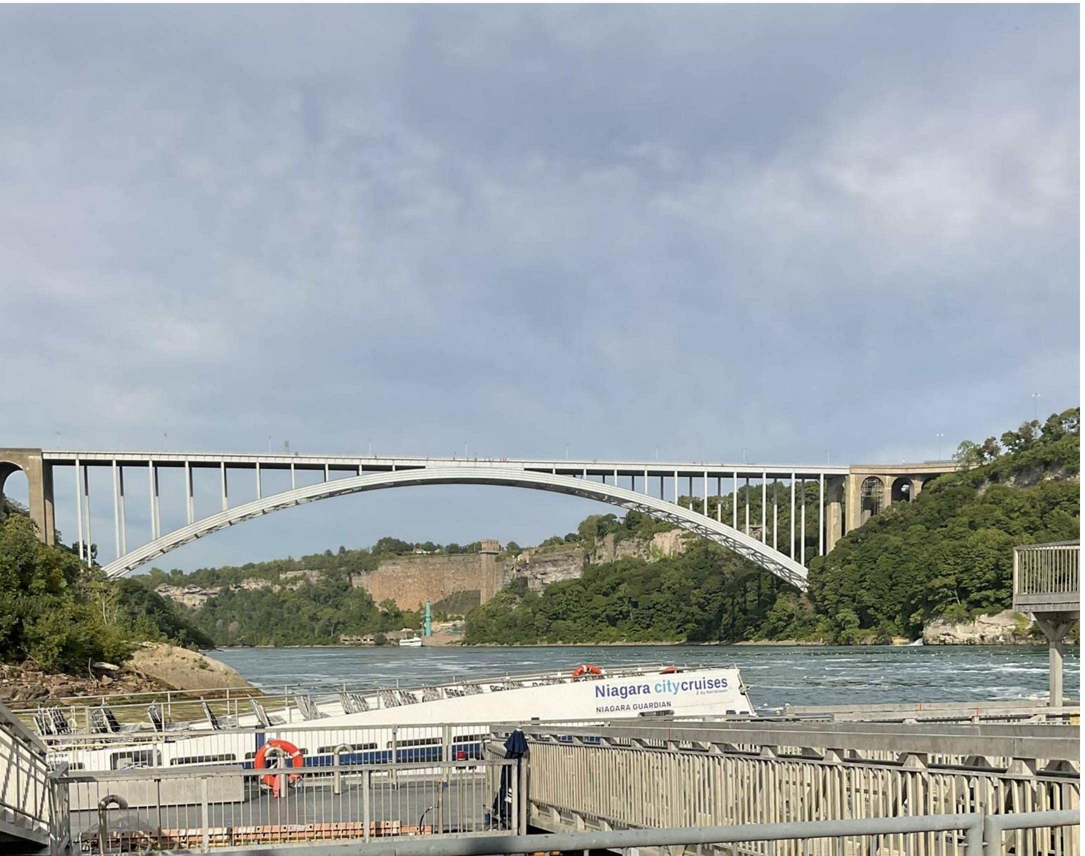
11章
境界条件(boundary condition)



辻

←カナダとアメリカの境界。

確認：変数と条件

$$\begin{cases} r, P, T, l, X_1, \dots, X_I \text{：変数} \\ \qquad m, t \text{：独立変数} \end{cases}$$

Complete equilibrium
静水圧平衡＋熱平衡
基礎方程式のうち、時間微分を含むのは

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{m_i}{\rho}\left(\sum_j r_{ji} - \sum_k r_{ik}\right)$$

のみ。他は空間微分のみ。

11-1

中心条件

中心：$m = 0$
このとき$r = l = 0$**[境界条件]**
ただしP, Tは外側からの積分で決まる。 P_c, T_c

中心付近でのr, l, P, Tの挙動を考えよう
（数値計算で発散しないように少しずらす）

中心条件

連続の式

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$$

$$\rightarrow \mathrm{d}(r^3) = \frac{3}{4\pi\rho}\mathrm{d}m$$

$$\rightarrow \boldsymbol{r} = \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{c}}}\right)^{\mathbf{1/3}} \boldsymbol{m}^{\mathbf{1/3}} \quad (when\ \rho = \rho_c)$$

エネルギー保存

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \epsilon_n - \epsilon_\nu + \epsilon_g$$

$$\rightarrow \boldsymbol{l} = \left(\boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{n}} - \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{\nu}} + \boldsymbol{\epsilon}_{\boldsymbol{g}}\right)_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{m}$$

r, lの$m = 0$まわりに
展開したときの1次式

中心条件

静水圧平衡

$$\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}$$

$$= -\frac{G}{4\pi}\left(\frac{4\pi\rho_c}{3}\right)^{\frac{4}{3}} m^{-\frac{1}{3}}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{P - P_c = -\frac{3G}{8\pi}\left(\frac{4\pi\rho_c}{3}\right)^{\frac{4}{3}} m^{\frac{2}{3}}}$$

圧力勾配は中心でなくなる(c.f.$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{Gm}{r^2}\rho$)

$$\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}r} \sim \frac{m}{r^2} \sim \frac{r^3}{r^2} \rightarrow 0$$

中心条件

エネルギー輸送①：輻射

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}m} = -\frac{3}{64\pi^2 ac}\frac{\kappa l}{r^4 T^3}$$

$$\rightarrow \mathbf{T^4 - T_c^4} = -\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{2ac}}\left(\frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{4\pi}}\right)^{\frac{2}{3}} \boldsymbol{\kappa_c\left(\epsilon_n - \epsilon_\nu + \epsilon_g\right)_c \rho_c^{\frac{4}{3}} m^{\frac{2}{3}}}$$

$$\left(P \sim P_c, T \sim T_c, \kappa \sim \kappa_c\right)$$

エネルギー輸送②：対流

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}m} = -\frac{T}{P}\frac{Gm}{4\pi r^4}\nabla_{ad}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\ln T - \ln T_c = -\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{1}{3}} G \frac{\nabla_{ad,c}\rho_c^{\frac{4}{3}}}{P_c} m^{\frac{2}{3}}}$$

表面条件

表面：$m = M$
このとき$\mathrm{P} = T = 0$
ただし実際にはISMによってP, Tは外側に向かってゆっくりと（有限値で）減少する。

星の「表面」を考えよう

11-2

表面条件

「光球(photosphere)」：
光学的深さ(optical depth)τを

$$\tau \equiv \int_R^\infty \kappa\rho\, dr = \bar{\kappa} \int_R^\infty \rho\, dr$$

($\bar{\kappa}$: mean opacity)と定義したとき$\tau = 2/3$となる面。
(c.f Eddington-Barbier関係式)

光球面での圧力：
光球面より外側にある質量の多くは光球面に十分に近くにあるとみなせるので

$$P_{r=R} = \int_R^\infty g\rho\, dr = g_0 \int_R^\infty \rho\, dr \quad = \quad \frac{GM}{R^2}\frac{2}{3}\frac{1}{\bar{\kappa}}$$

11-2

表面条件

光球面での温度「有効温度T_{eff}」：
その天体と同じエネルギー流束を発する黒体の温度

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$$

(c.f. Stefan-Boltzmann則)

κ を $\bar{\kappa}$ ではなく圧力・温度依存性を考慮してもう少し詳細に計算する。
Eddington近似：

$$f \equiv \frac{K}{J} = \frac{\int_{-1}^{1} I\mu^2 \mathrm{d}\mu}{\int_{-1}^{1} I \mathrm{d}\mu}$$

(μ: $\cos\theta$, I: 輻射強度)と定義した$f = 1/3$とする近似。等方近似(?)

表面条件

Eddington近似+灰色大気(振動数依存性なし)

$$T^4(\tau) = \frac{3}{4} T_{eff}^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right)$$

⇒$\kappa(P,T)$を求められる。これを用いて

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{Gm}{r^2 \kappa} \approx \frac{GM}{R^2 \kappa}$$

を積分すると、精度の良い$P_{r=R}$を計算できる。

単に$P, T \to 0$とするよりは良い近似で計算できたが、拡散近似が有効でない表面近くでは複雑な輸送方程式が必要。

11-2

表面条件

表面と内部の条件を
「フィッティング質量」$m_F(\lesssim M)$の位置で合わせる
$(M-m_F$が小さいほど外側へのエネルギー輸送は小さい)

内部ではまず$M, \mathrm{X_i(M)}$が与えられているとする。すると
$M, \mathrm{X_i(M)}$によって、前の方程式などを用いることで表面での2つの変数の組（ R, T_{eff}など）が解として得られる。
この解をm_Fまで積分することで外部の解$r = r_F^{ex}$などが求まる。
内側からも同様に計算することでm_Fでの境界条件を計算できる。

$$r_F^{ex} = r_F^{in}, \qquad P_F^{ex} = P_F^{in}, \qquad T_F^{ex} = T_F^{in}, \qquad l_F^{ex} = l_F^{in}$$

11-2

表面条件

外部と内部の解を合わせるシューティング法に替わる、数値計算で良く用いられる手法

1. 表面で適当なR, Lのパラメータをたくさん用意する
2. 計算して$r_F^{ex}(R,L)$, $P_F^{ex}(R,L), T_F^{ex}(R,L), l_F^{ex}(R,L)=L$を求める。
3. 逆に解いて$\mathrm{R}(r_F^{ex},L)$としてP_F^{ex}, T_F^{ex}の式に代入
$$P_F^{ex}(\mathrm{R}(r_F^{ex},L),L)\equiv\pi(r_F^{ex},L)$$
$$T_F^{ex}(\mathrm{R}(r_F^{ex},L),L)\equiv\theta(r_F^{ex},L)$$
4. 境界条件を用いて$ex\rightarrow in$と置き換え
5. 内部も同様に適当な$\mathrm{P_c}, \mathrm{T_c}$を用意し計算する。外部とと重なるパラメータで求めたい変数の組が得られる。

$m=m_F$での内部と外部の変数の区別をなくすことができる？

11.3 表面条件の影響と外層の解の特性
11.3.1 放射層

外層(envelope)を考えるのに“m”は不便。
→「普通の」星では半径の半分ほどに90%の質量がある
⇒“P”を用いる。(Pはmの増加に伴って単調減少)

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{3}{64\pi\sigma G}\frac{\kappa l}{T^3 m}$$

この式から図11.2のように、
放射層におけるTとPの関係を導く

11.3 表面条件の影響と外層の解の特性
11.3.1 放射層

κを近似する

$$\kappa = \kappa_0 P^a T^b$$

$\kappa \approx \tau(\text{optical depth})/\rho R$

$a > 0$: 等温なら高圧ほど吸収する→衝突頻度
$b < 0$: 等圧なら低温ほど吸収する→高温ほど放射する(?)
（c.f. Kramerの法則：$\kappa \propto PT^{-4.5} (\propto \rho T^{-3.5})$）
この式を代入、$l \approx L, m \approx M$として積分を実行(envelope)

$$\int T^{3-b} dT = \frac{3\kappa_0}{64\pi\sigma G} \frac{L}{M} \int P^a dP$$

$$\mathbf{T}^{4-b} = \boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{P}^{1+a} + \boldsymbol{C}\right)$$

$$B = \frac{4-b}{1+a} \frac{3\kappa_0}{64\pi\sigma G} \frac{L}{M}$$

11.3 表面条件の影響と外層の解の特性

11.3.1 放射層

Kramerの法則(a=1, b=-4.5)を代入する。

$$\mathbf{T}^{8.5}=\boldsymbol{B}\left(\boldsymbol{P}^{2}+\boldsymbol{C}\right)$$

$$\nabla\equiv\left(\frac{d\ln T}{d\ln P}\right)=\frac{4}{17}\frac{BP^{2}}{T^{8.5}}$$

(5.19)式で$\kappa_{\nu}\propto\rho T^{-\frac{1}{2}}\nu^{-3}$を代入して
積分を実行する。
bf, ff吸収で使える

$C(=P_0^{1+a}-T_0^{4-b}/B)$の値によって∇が変化する。
放射層では$\nabla_{ad}=0.4>\nabla$となる(Schwarzschild criterion)
ので、これが上式が成り立つための条件となる。

i)　C=0

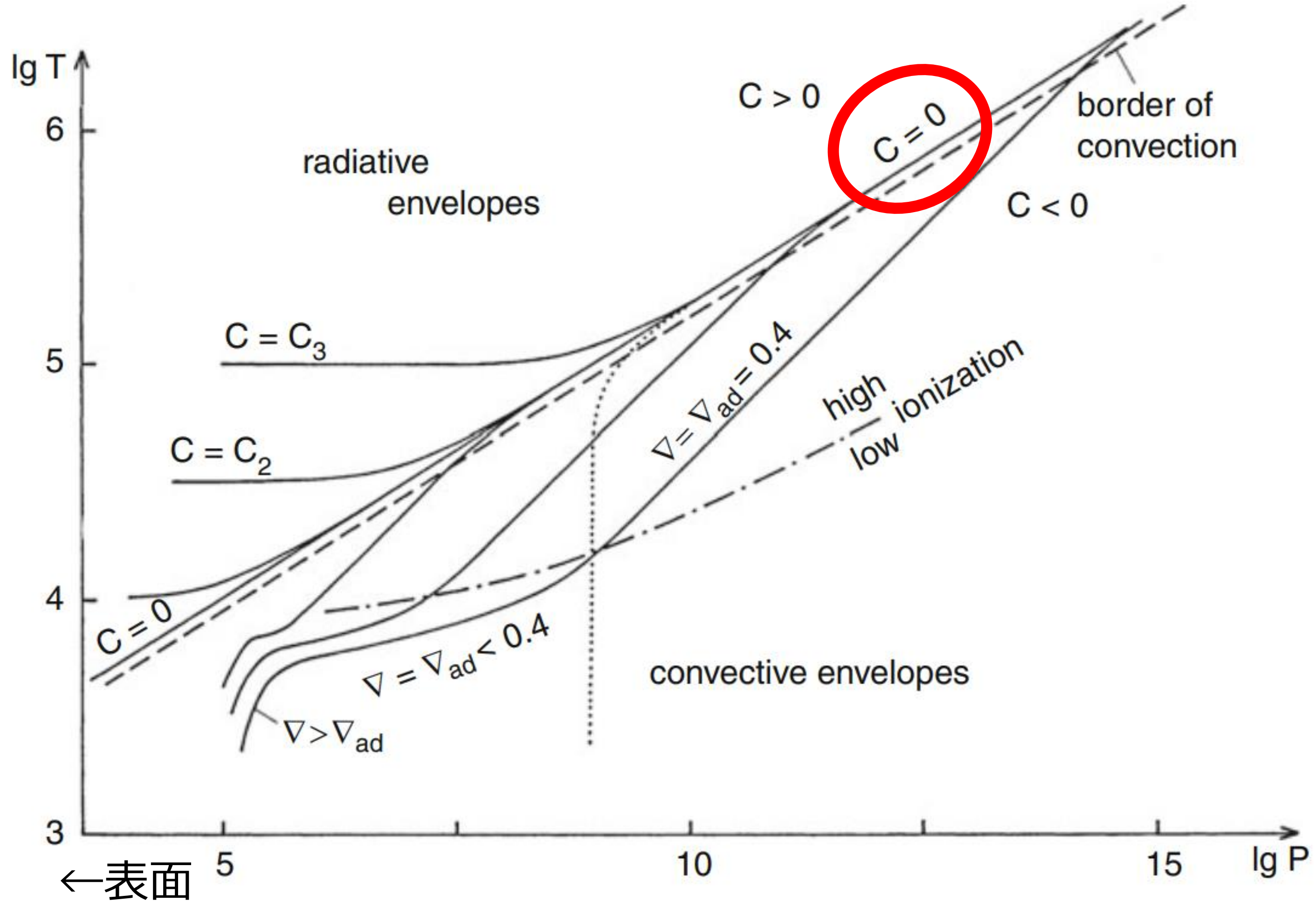
$$\mathbf{T}^{8.5} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{2}$$

$$\log \boldsymbol{T} = \frac{\mathbf{4}\log \boldsymbol{P} + \mathbf{2}\log \boldsymbol{B}}{\mathbf{17}}$$

$$\nabla = \frac{4}{17} \approx 0.235 < \nabla_{ad}$$

⇒放射の条件を満たす

⇒$P \to 0$で$T \to 0$



ii) C>0

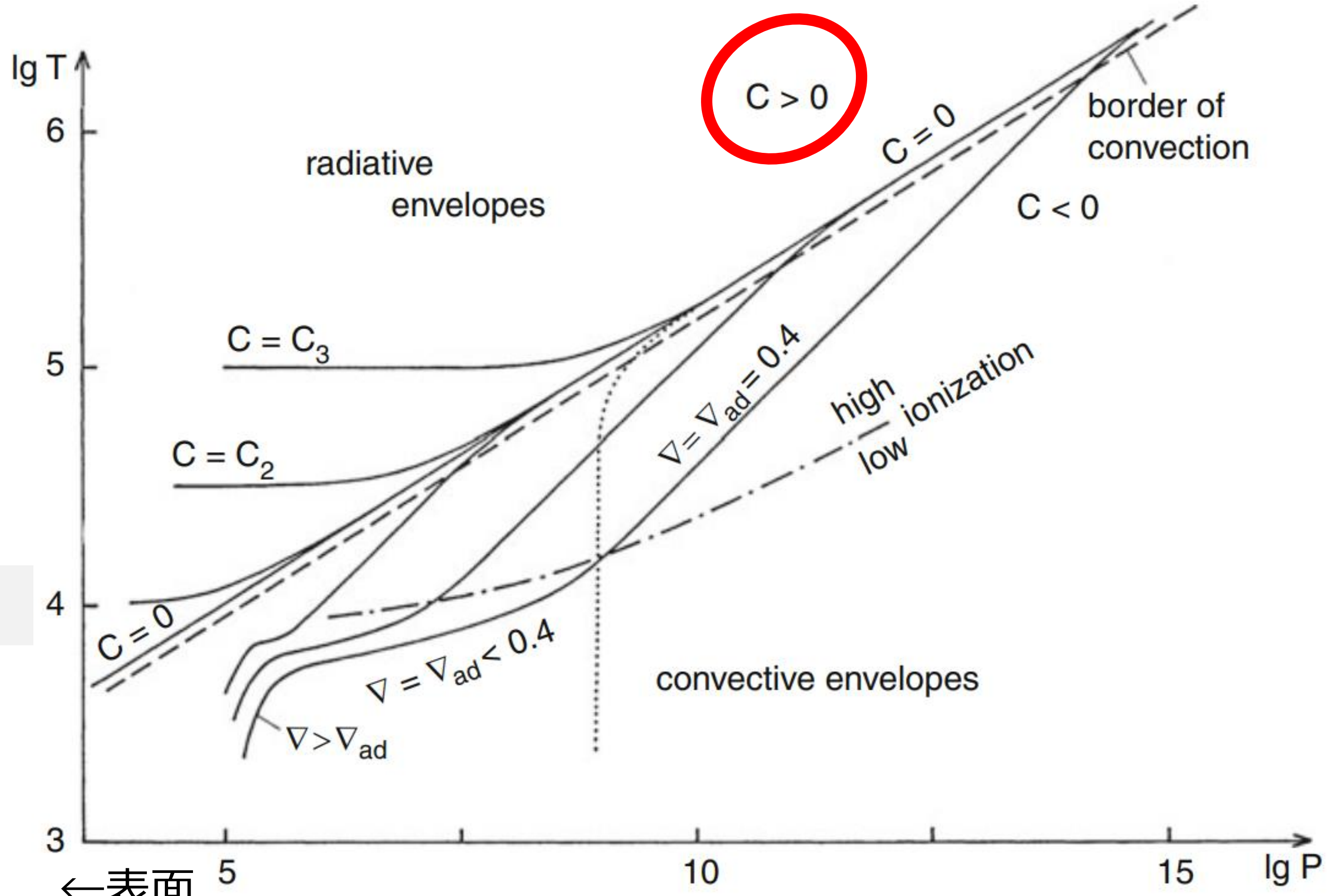
$\mathbf{T}^{8.5} > \boldsymbol{BP^2}$

グラフの上側

$\nabla < 0.235 < \nabla_{ad}$

⇒放射の条件を満たす

$\mathbf{T}^{8.5} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{P}^2 + \boldsymbol{C})$



←表面

① $P^2 \ll C$

$T \approx const.$

表面に近づくと一定

光球面温度T_{eff}が臨界温度$(\approx 10^4 K)$以上の場合、

C=0の線を超えるので放射層が存在。

② $P^2 \gg C \Rightarrow C = 0$に漸近。

iii) C<0

$\mathbf{T^{8.5}} < \boldsymbol{BP^2}$

グラフの下側

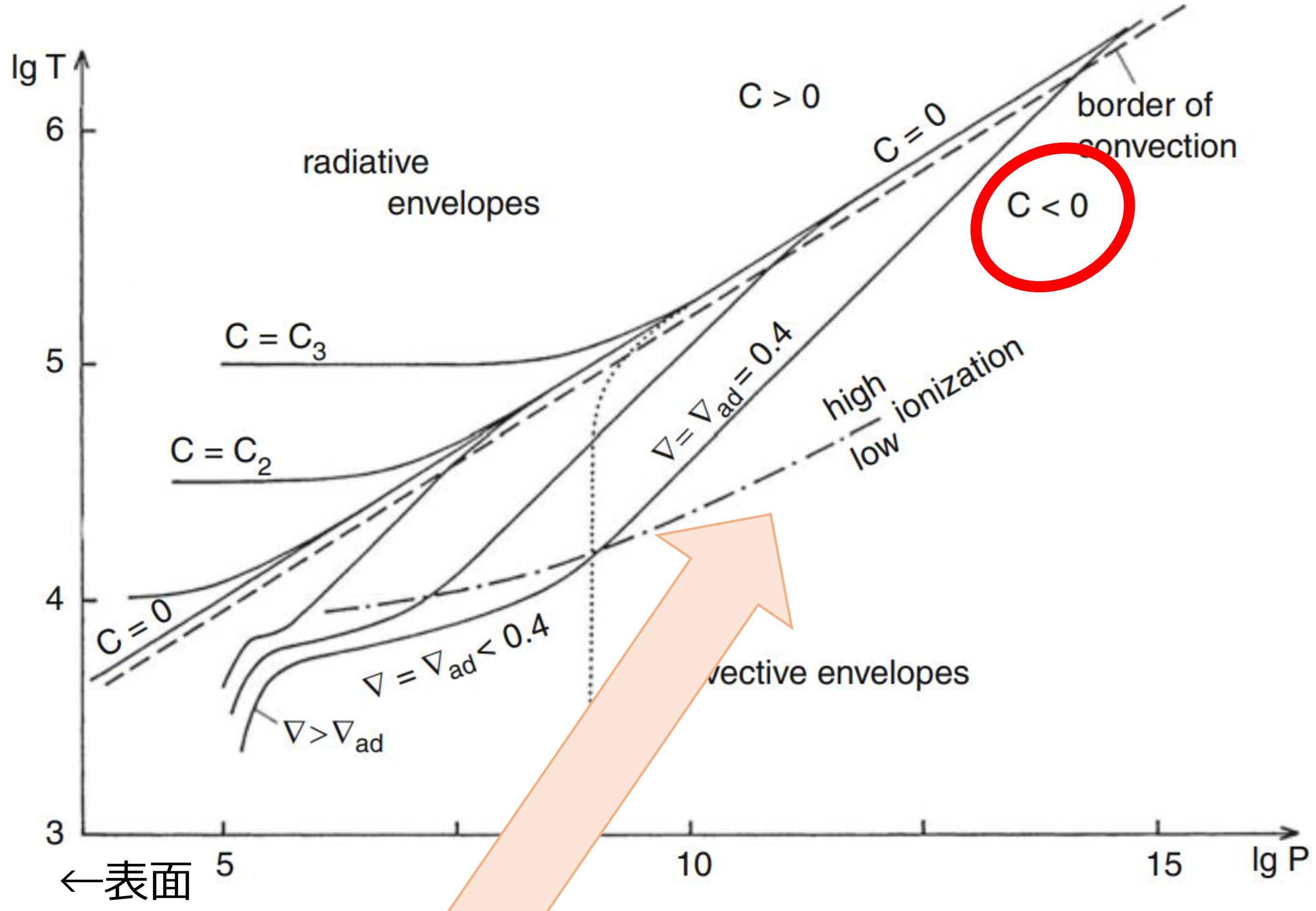
$\nabla > 0.235$

⇒有限のPで$T \to 0$

対流で考える必要がある

$\nabla = \nabla_{ad}$の境界は

$$T^{8.5} = \frac{4}{17}\frac{BP^2}{\nabla_{ad}}$$



∇_{ad}が定数なら直線だが、表面付近でのionization効果によって

∇_{ad}は急減

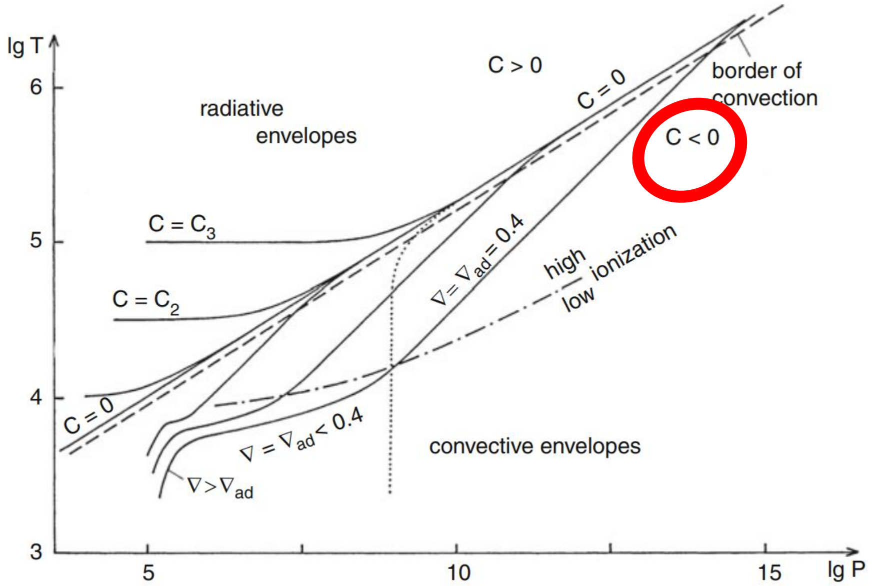
⇒境界は上向きに曲がる

iv) C<0：対流の解

・密度が高い⇒対流強

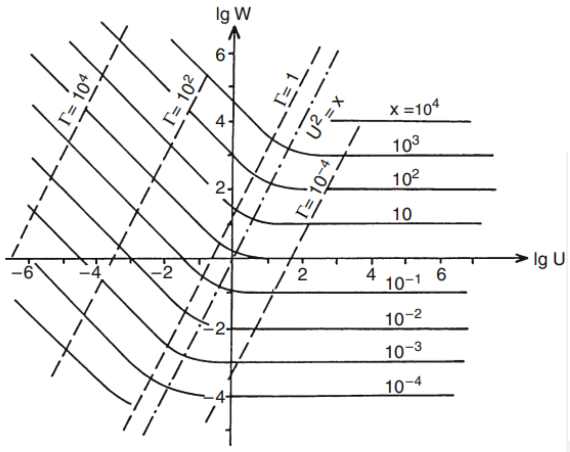
$$\nabla = \nabla_{ad}$$

・HやHeがイオン化されなくなる温度まで下がると（Hの場合約10^4K→）∇_{ad}が小さくなり$\nabla = \nabla_{ad}$の曲線が緩やかになる
（断熱温度勾配？）



←表面

7.3節で
U($\approx \tau_{ff}/\tau_{adj}$)が小さいときは対流効率が良かった



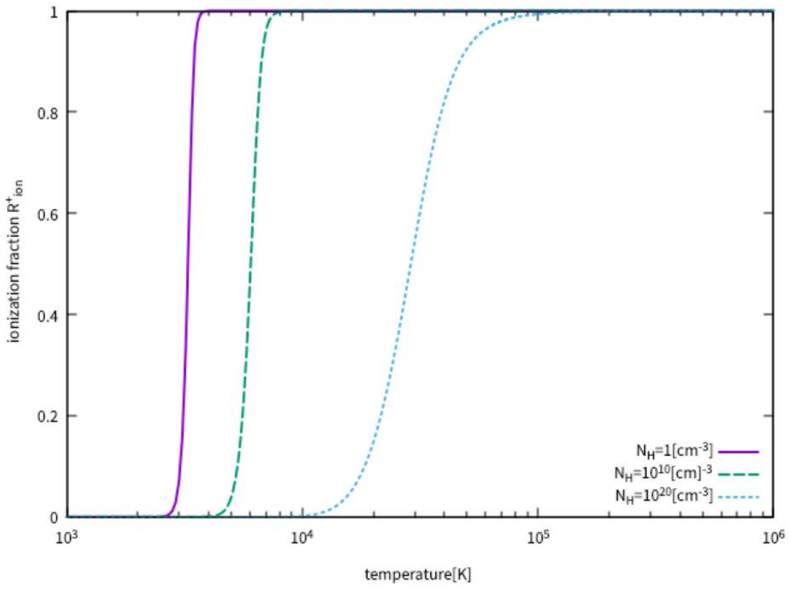


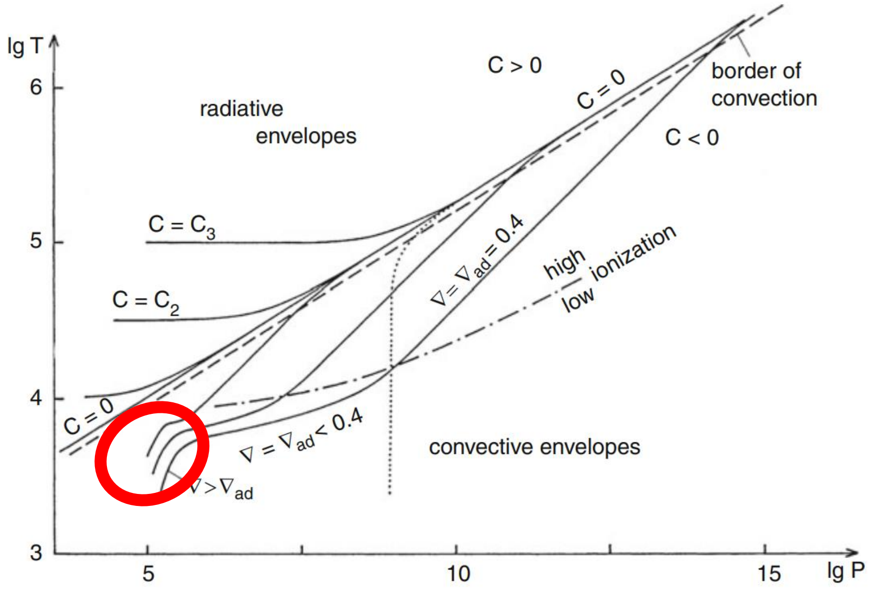
図 3 それぞれの温度における水素原子の電離度。横軸は温度で縦軸が電離度である。

iv) C<0：対流の解

・表面に近づくと密度が小さくなり

$$\nabla > \nabla_{ad}$$

となり、傾きが急になる。
（不確かさが大きい）



←表面

光球面温度T_{eff}が低いほど対流はより内部で起きる

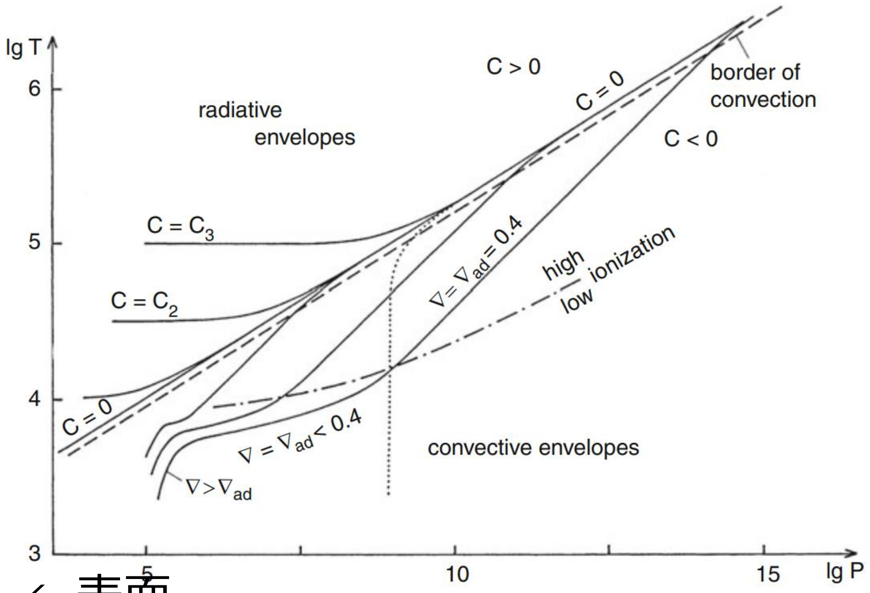
まとめ

$$\kappa = \kappa_0 P^a T^b$$

粗い近似だが、他の場合（電子散乱）でも同様。

1. 放射層： T_{eff}>9000K
   内部ほどC=0に収束するので
   外側の境界条件は重要でない

2. 対流層： T_{eff}小
   全対流の星がT_{eff}最小となる。
   光球面やover-adiabatic層の位置で
   大きく影響を受ける



←表面