PHYSICAL KINETICS[1]

辻 勇吹樹

2025 年 6 月 9 日

KINETIC THEORY OF GASES

15. Phenomena in Highly Rarefied Gases

非常に希薄な気体では、15 節で述べられているように、気体と body の間の温度差 τ、速度差 $\boldsymbol{V}$、body の外側に働く力を $\boldsymbol{F}$ とすると

$$q = \alpha\tau + \beta V_n, \quad F_n = \gamma\tau + \delta V_n, \quad \boldsymbol{F}_t = \theta \boldsymbol{V}_t \tag{1}$$

と展開することができる。n, t は body に対する垂直成分と水平成分。

complete accommodation とは body と衝突して跳ね返る粒子の間で熱平衡になっている状態である。

PROBLEM 4

complete accommodation のときの係数 $\alpha = \alpha_0$ の値を求めよ。

body 表面に垂直な方向 x のエネルギー流束 q は

$$q = \int (\epsilon - \epsilon')|v_x| w(\Gamma', \Gamma) f(\Gamma) \mathrm{d}\Gamma \mathrm{d}\Gamma' \tag{15.7}$$

と書ける。complete accommodation のとき、分子が body に衝突したあとに壁と熱平衡状態になっている。したがって f_1 を body の温度 T_1, f_2 を入射粒子の温度 T_2 に従うボルツマン分布とすると

$$q = \int (f_2 - f_1)\epsilon v_x \mathrm{d}\Gamma \tag{2}$$

となる。ここで

$$\int w(\Gamma,\Gamma')\mathrm{d}\Gamma' = 1 \tag{15.1}$$

を用いた。さらに (2) 式の各項の計算をする。ϵ_{int} を内部エネルギーとして $\epsilon = \epsilon_{int} + \frac{1}{2}mv^2$ を用いる。

$$\int f\epsilon v_x \mathrm{d}\Gamma = \int f\epsilon_{int} v_x \mathrm{d}\Gamma + \int f\left(\frac{1}{2}mv^2\right)v_x \mathrm{d}\Gamma \tag{3}$$

$$= \nu\bar{\epsilon_{int}} + \int f\left(\frac{1}{2}mv_x^2\right)v_x \mathrm{d}\Gamma + \frac{1}{2}m\nu\left(\bar{v_y^2} + \bar{v_z^2}\right) \tag{4}$$

$f(v_x) = \sqrt{m/2\pi kT}\exp\left(-mv_x^2/2T\right)$ であるからガウス積分を実行する。また $\bar{v_i^2} = kT/m$ となるので

$$\int f\epsilon v_x \mathrm{d}\Gamma = \nu\bar{\epsilon_{int}} + \nu kT + \nu kT \tag{5}$$

$$= \nu(\bar{\epsilon_{int}} + 2kT) \tag{6}$$

$$= \nu\left(\bar{\epsilon} + \frac{1}{2}kT\right) \quad \left(\bar{\epsilon_{int}} = \bar{\epsilon} + \frac{3}{2}kT\right) \tag{7}$$

$$= \nu T\left(c_v + \frac{1}{2}\right) \quad (\bar{\epsilon} = c_v T) \tag{8}$$

となる。すなわち

$$q = \nu T_2\left(c_v + \frac{1}{2}\right) - \nu T_1\left(c_v + \frac{1}{2}\right) \tag{9}$$

$$= \nu\left(c_v + \frac{1}{2}\right)(T_2 - T_1) \tag{10}$$

となる。$q = \alpha(T_2 - T_1)$ なので α_0 は

$$\alpha_0 = \frac{P}{\sqrt{2\pi mT}}\left(c_v + \frac{1}{2}\right) \tag{11}$$

と求められる。ν の式で $T_1 \approx T_2 \equiv T$ とした。

PROBLEM 5

complete accommodation のときの係数 β, γ の値を求めよ。

ガウス積分を使って ν を分布関数を使って表すと

$$\nu = \int f v_x \mathrm{d}\Gamma \tag{12}$$

$$= n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \tag{13}$$

となる。単位時間単位面積当たりの x 方向への運動量流束 Π_x はガウス積分を用いて

$$\Pi_x = \int f m v_x v_x \mathrm{d}\Gamma \tag{14}$$

$$= nm\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \int v_x^2 \exp\left(-mv_x^2/2T\right)\mathrm{d}\Gamma \tag{15}$$

$$= n\frac{kT}{2} \tag{16}$$

求めた運動量流束は 1 方向なので圧力 P との関係は $P = 2\Pi_x$ で与えられる。以上より

$$P = nkT \tag{17}$$

$$= \nu\sqrt{2\pi mkT} \tag{18}$$

入射 (T_1) と反射 (T_2) の運動量流束の差が力になるので

$$F_n = \frac{\nu}{2}\sqrt{2\pi mkT_2} - \frac{\nu}{2}\sqrt{2\pi mkT_1} \tag{19}$$

$$= \frac{\nu}{2}\sqrt{2\pi mk}\frac{T_2 - T_1}{\sqrt{T_2} + \sqrt{T_1}} \tag{20}$$

$$\approx \frac{\nu}{2}\frac{\sqrt{2\pi mk}}{2\sqrt{T}}(T_2 - T_1) \tag{21}$$

$$= \frac{P}{4T}(T_2 - T_1) \tag{22}$$

したがって $F_n = \gamma(T_2 - T_1)$ とすると

$$\gamma_0 = P/4T \tag{23}$$

と求められる。(15.6) 式より

$$\beta_0 = P/4 \tag{24}$$

もすぐに導かれる。

PROBLEM 6

complete accommodation のときの係数 δ, θ の値を求めよ。

body 静止系を考え、気体は速度 $\boldsymbol{V}$ で動くとする。このときの分布関数は

$$f \propto \exp\left(-\frac{\epsilon}{kT}\right) \tag{25}$$

$$\propto \exp\left\{-\frac{\epsilon_{int}}{kT} - \frac{m}{2kT}\left[(v_x - V_x)^2 + (v_y - V_y)^2 + v_z^2\right]\right\} \tag{26}$$

となる。complete accommodation では反射する分子は静止した body と熱平衡なので $\boldsymbol{V} = 0$ の分布関数になる。温度差は 0 とする。
まずは body に衝突する分子の y 方向への運動量流束を求める。入射する分子は V_y まわりの速度を持つので

$$\int m v_y v_x f \mathrm{d}\Gamma = m V_y \nu \tag{27}$$

となる。一方反射する粒子の y 方向への運動量流束は complete accommodation より 0 になる。この差が F_y となるので $F_y = \theta V_y$ より

$$\theta_0 = \nu m = P\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \tag{28}$$

と求められる。

続いて x 方向の速度差と力の関係を導く。静止系での分布関数を f_0 として、V_x の 1 次では (26) 式より

$$f = f_0 + V_x\left(\frac{m v_x}{kT} f_0\right) \tag{29}$$

となる。このとき単位時間単位面積当たりに body に衝突する粒子の数 ν は (13),(16) 式を用いて

$$\nu = \int f v_x \mathrm{d}\Gamma \tag{30}$$

$$= \int f_0 v_x \mathrm{d}\Gamma + V_x \frac{m}{kT}\int f_0 v_x^2 \mathrm{d}\Gamma \tag{31}$$

$$= \frac{P}{\sqrt{2\pi m kT}} + V_x \frac{m}{kT} \times n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \int v_x^2 \exp\left(-\frac{m v_x^2}{2kT}\right) \mathrm{d}\Gamma \tag{32}$$

$$= \frac{P}{\sqrt{2\pi m kT}} + \frac{P V_x}{2kT} \tag{33}$$

となる。また運動量流束は

$$\int m v_x^2 f \mathrm{d}\Gamma = \int m v_x^2 f_0 \mathrm{d}\Gamma + V_x \frac{m^2}{kT} \int v_x^3 f_0 \mathrm{d}\Gamma \tag{34}$$

$$= \frac{1}{2}P + PV_x \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}} \tag{35}$$

次に反射する分子を考える。粒子数 ν は入射する分子数と同じになるように規格化される。すなわち

$$\nu = A\frac{P}{\sqrt{2\pi mkT}} \tag{36}$$

$$= \frac{P}{\sqrt{2\pi mkT}} + \frac{PV_x}{2kT} \tag{37}$$

として規格化定数 A が決められる。このときに持ち出される運動量は

$$-\frac{1}{2}AP = -\frac{1}{2}P - \frac{1}{2}PV_x\sqrt{\frac{\pi m}{2kT}} \tag{38}$$

となる。(35),(38) 式の和が x 方向に働く力となる。

$$F_x = PV_x\sqrt{\frac{2m}{\pi kT}} - \frac{1}{2}PV_x\sqrt{\frac{\pi m}{2kT}} \tag{39}$$

$$= P\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\left(2 - \frac{1}{2}\pi\right)V_x \tag{40}$$

$F_x = \delta V_x$ として

$$\delta_0 = P\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}\left(2 - \frac{1}{2}\pi\right) = \theta_0\left(2 - \frac{1}{2}\pi\right) \tag{41}$$

と求められる。

PROBLEM 7

complete accommodation のとき希薄な気体の中で速度 V で動く平面上を動く板の温度を求めよ。

板の静止系において速度 V で動く分子が body に与えるエネルギーは (8) 式より

$$\nu\epsilon = \nu T_2\left(c_v + \frac{1}{2}\right) + \nu * \frac{1}{2}mV^2 \tag{42}$$

となる。一方分子が持ち出すエネルギーは

$$\nu\epsilon = \nu T_1\left(c_v + \frac{1}{2}\right) \tag{43}$$

となる。板の温度が変わらないとみなせるとき、これらのエネルギーは等しくなければならないので

$$\nu T_2\left(c_v + \frac{1}{2}\right) + \nu * \frac{1}{2}mV^2 = \nu T_1\left(c_v + \frac{1}{2}\right) \tag{44}$$

$$T_1 - T_2 = \frac{mV^2}{2c_V + 1} \tag{45}$$

となる。求める板の温度は T_1 である。

Appendix: ガウス積分

$$\int_0^\infty xe^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\alpha} \tag{46}$$

$$\int_0^\infty x^2e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} \tag{47}$$

$$\int_0^\infty x^3e^{-\alpha x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\alpha^2} \tag{48}$$

今回は $\alpha = m/2kT$。

参考文献

[1] L.P. Pitaevskii and E.M. Lifshitz. *Physical Kinetics: Volume 10*. Number 第 10 巻. Butterworth-Heinemann, 2012.