Solar Stellar Dynamics[2]

C1SB2064　辻 勇吹樹

2024 年 4 月 14 日

2 The Two-Body Problem

2.1 Introduction

2 体問題は 2 天体の重力相互作用の計算に役立つだけでなく、3 体以上の系においても 2 体問題に摂動を付与したものとして考えることができる。例えば木星の太陽に対する楕円運動は主に土星の摂動を受けているものである。

Isaac Newton は著作 Principia の中で観測されている惑星の楕円軌道を引き起こす力は 2 種類存在することを示した。惑星が楕円軌道の中心から向心力を受けている場合は距離に比例する力を、楕円の焦点の 1 つから受けている場合は距離の 2 乗に反比例する力を受けることになる。このあと 2.3 節で用いるのは後者の力、ケプラーの第 1 法則だが、前者の幾何学的な証明はこちら [1] を参照されたい。

2.2 Equation of Motion

慣性系に固定された原点 O に対して位置ベクトル $\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}$ を持つ質量 m_1, m_2 の質点の運動を考える。相対ベクトル $\mathbf{r} = \mathbf{r_2} - \mathbf{r_1}$ を用いれば運動方程式は

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r_1}} = G\dfrac{m_1 m_2}{r^3}\mathbf{r} & (1) \\ m_2 \ddot{\mathbf{r_2}} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^3}\mathbf{r} & (2) \end{cases}$$

で与えられる。G は重力定数である。ここで重心ベクトル $\mathbf{R}$ は

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r_1} + m_2 \mathbf{r_2}}{m_1 + m_2} \tag{3}$$

と表されるので運動方程式より $\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}$ であることが分かる。お互いに同じだけの力を及ぼし合っていて他の力を受けていない場合、このように重心は慣性運動を行う。重心系での運動の考察は 2.7 節で行うが、ここからは相対ベクトル $\mathbf{r}$ を用いた m_1 に対する m_2 の運動を考える。太陽に対する地球のように、$m_2 \ll m_1$ という状況ではこの $\mathbf{r}$ が 2 体系での運動を完全に決めている。運動方程式は式 (1)(2) より

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G\frac{m_1 + m_2}{r^3}\mathbf{r} = -\mu\frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{4}$$

ここで $\mu = G(m_1 + m_2)$ は換算質量ではないことに注意する。さらに $\mathbf{r}$ の外積を両辺にかけることで右辺が落ちるので $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ が得られる。したがって

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{h} \quad (\mathbf{h} : const.) \tag{5}$$

となる。左辺は相対運動における単位質量あたりの角運動量のような式になっているが、実際の重心系における角運動量保存の式は 2.7 節で与えられる。この式は m_2 は m_1 に対する位置と速度が常に同じ ($\mathbf{h}$ に垂直な) 平面上で運動していることを示している。

相対運動が平面上での運動であることが分かったので、ここからは 2 次元極座標 (r, θ) を用いて、ケプラーの第 2 法則を示していく。基底ベクトル $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ の時間微分

$$\dot{\mathbf{e}_r} = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad \dot{\mathbf{e}_\theta} = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r \tag{6}$$

に注意すれば

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r \tag{7}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \tag{8}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta})\mathbf{e}_r + \left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dot{\theta}\right)\right]\mathbf{e}_\theta \tag{9}$$

と求められる。このとき $h = |\mathbf{h}| = r^2\dot{\theta}$ となる。また、$\mathbf{r}$ が微小時間 δt の間に掃く面積 dA は、座標が (r, θ) から $(r + \delta r, \theta + \delta\theta)$ に変化したとすれば

$$dA \approx \frac{1}{2}r^2\delta\theta \tag{10}$$

とみなすことができる。したがって面積速度 $(\delta t \to 0)$ は

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}h \tag{11}$$

で一定となる。また面積速度は $A = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ と表せるので、両辺の時間微分をとることで $\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ より右辺は 0、すなわち面積速度が一定であることを示すこともできる。以上で面積速度一定の法則は導かれた。

2.3 Orbital Posion and Velocity

相対ベクトルの運動方程式 (4) を極座標に変換すると r 方向に

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2} \tag{12}$$

となる。ここで定数 $h = r^2\dot{\theta}$ と、$u = 1/r$ を用いて時間微分を θ 微分に変換する。

$$\dot{r} = -\frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = -h\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} \tag{13}$$

$$\ddot{r} = -h\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2}\dot{\theta} = -h^2u^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\theta^2} \tag{14}$$

これらの関係式を運動方程式に代入すると

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \varpi)} \tag{15}$$

という解が得られる。ここで $p = h^2/\mu$ は半直弦、e は離心率と呼ばれる。θ, ϖ については後で述べるが定数である。この式は円錐曲線のグループに共通する式であり、離心率によって描く曲線が変化する。

$$\text{円}: \quad e = 0. \quad p = a \tag{16}$$

$$\text{楕円}: \quad 0 < e < 1. \quad p = a(1-e^2) \tag{17}$$

$$\text{放物線}: \quad e = 1. \quad p = 2q \tag{18}$$

$$\text{双曲線}: \quad 1 < e. \quad p = a(1-e^2) \tag{19}$$

a は軌道長半径と呼ばれる。q は放物線における焦点を表す。いくつかの天体の軌道に例外はあるが、多くは $e \ll 1$ となっているためここからは楕円に注目していく。このときの解は

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos(\theta - \varpi)} \tag{20}$$

となる。ここでいくつかの記号を説明する。

- 軌道短半径 b
  $b^2 = a^2(1-e^2)$ で表され、楕円の中心から短い方の端までの長さを表す。
- 近点 r_p, 遠点 r_a
  上式の解より、最も相対距離が近くなるのは $\theta = \varpi$ のときであり、この距離 $r_p = a(1-e)$ を近点と呼ぶ。一方 $\theta = \varpi + \pi$ のとき距離は最大値 $r_a = a(1+e)$ をとり、これを遠点と呼ぶ。

- 近点引数 ϖ
  軌道面において、昇交点 (軌道面と基準とする座標系の交点) から近点までの角度。2 体問題では定数となる。
- 真近点角 f, True longitude θ
  真近点角とは、軌道面において m_1 に対して m_2 と近点の張る角度である。$f = \theta - \varpi$ と書ける。θ は True longitude と呼ばれ、基準とする座標系と軌道面との角度を表す。

そして、前節での面積速度一定の法則の式 (11) を用いると m_2 が楕円の面積 πab を全て掃くのに周期 T だけかかると考えれば

$$\pi ab = \frac{h}{2}T = \frac{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}{2}T \tag{21}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu}a^3 \tag{22}$$

となってケプラーの第 3 法則が導かれる。$\mu = G(m_1 + m_2)$ を思い出すと、周期 T, 軌道長半径 a の関係を持つ m_c, m と、同じ m_c について周期 T', 軌道長半径 a' の関係を持つ m' について

$$\frac{m_c + m}{m_c + m'} = \left(\frac{a}{a'}\right)^3 \left(\frac{T'}{T}\right)^2 \tag{23}$$

の関係式が得られる。

例えば m_c が太陽で m, m' が太陽系の惑星とすれば $m, m' \ll m_c$ であるから地球の太陽に対する軌道長半径 (1AU) と周期 (1 年)、もう一つの惑星のどちらかの値が得られればもう一方の値を推定することができる。

また m_c を惑星として、m を太陽、m' をその惑星の衛星とすれば、$m' \ll m_c$ が成り立つとき $m_c \ll m$ より式 (23) の左辺は $m_{\text{太陽}}/m_{\text{衛星}}$ と近似できる。この式から衛星の運動の情報から質量を推定することができることが分かる。

運動方程式 (4) について $\dot{\mathbf{r}}$ の内積をとることで

$$\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + \mu\frac{\dot{r}}{r^2} = 0 \tag{24}$$

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = C \tag{25}$$

という定数が得られる。この式は *vis viva integral*, すなわち単位質量あたりのエネルギーを表す。ここでさらに定数 C を別の式で表すことを考える。今回の系では $\dot{\theta} = \dot{f}$

より式 (8) から

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{f}^2 \tag{26}$$

となる。ここで楕円の式 (20) より

$$\dot{r} = \frac{r\dot{f}e\sin f}{1+e\cos f} = \frac{he\sin f}{a(1-e^2)} \tag{27}$$

と表せる。したがって

$$v^2 = \frac{h^2}{a^2(1-e^2)^2}(1+2e\cos f + e^2) \tag{28}$$

$$= \frac{h^2}{a^2(1-e^2)^2}\left(\frac{2a(1-e^2)}{r} - (1-e^2)\right) \tag{29}$$

$$= \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{30}$$

となる。エネルギーの式と比較すれば

$$C = -\frac{\mu}{2a} \tag{31}$$

と与えられる。さらにこれを離心率 e について解けば

$$e = \sqrt{\frac{2h^2C}{\mu^2} + 1} \tag{32}$$

と表せる。この式より多くの天体が他の円錐曲線ではなく、楕円形で運動しているのは C が負、すなわちエネルギーが負で中心天体の重力ポテンシャルに捉えられているためだと言える。放物線では $C = 0$, 双曲線では正で $C = \mu/2a$ となる。

参考文献

[1] 楕円軌道の発見と万有引力の法則（「プリンキピア」の説明）. `http://fnorio.com/0159Principia/Principia.html`. (Accessed on 04/13/2024).

[2] Carlo Murray. *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press, 2000.