Solar Stellar Dynamics[1]

C1SB2064　辻 勇吹樹

2024 年 4 月 14 日

2 The Two-Body Problem

2.8 The Orbit in Space

軌道面と基準面

2 章ではこれまで 2 次元での星の軌道を考えてきたが、ここからは 3 次元空間の中での軌道を表現する方法について考えていく。

中心天体を原点として、軌道平面上に 3 次元デカルト座標を張る。x 軸は楕円の近点の方向に、y 軸は軌道平面上に x 軸に垂直な方向に、z 軸は軌道面とは垂直でデカルト座標が右手系となるようにとる。

また軌道平面に対して基準面も考えて、原点を揃えて XYZ 軸を張る。太陽系での天体の運動を考える場合は、慣例的に太陽中心の座標系 (heliocentric coordinate system) が取られる。これは地球の太陽に対する軌道を基準面として、基準線を春分点の方向にとる。春分点は地球の赤道面と黄道面 (太陽の見かけの動き) の交点にあたる (図 1)。ただし他の天体からの重力を受けてこの基準面が時間変化することに注意が必要である。

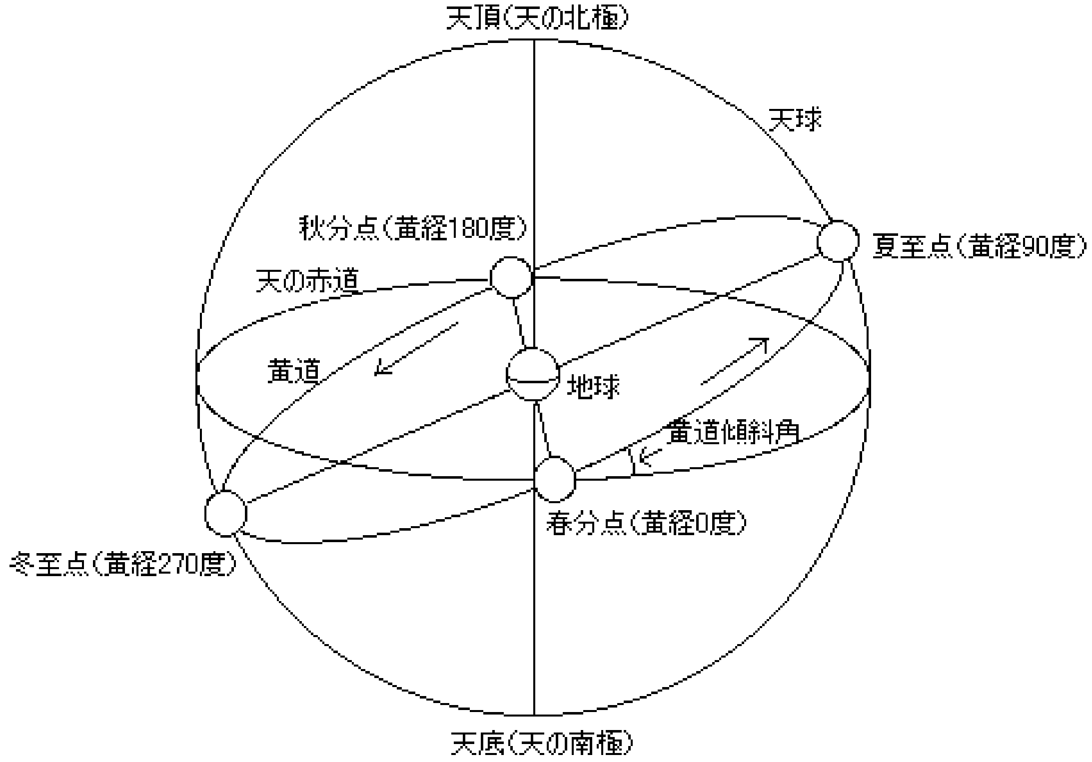

図 1　nnh, CC BY-SA 3.0 ¡http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/¿, via Wikimedia Commons

基準面に対する軌道面の 3 次元的な傾きはオイラー角によって表現できる。まず xyz 軸と XYZ 軸を揃えて、軌道面のみを以下のステップで 3 つの角度変数を用いて回転させることで任意の傾きを持った軌道面を表現することができる。

1. z 軸まわりに角度 ω だけ回転させる。ω は近点角と呼ばれ、軌道面での近点から基準面との交わる点 (昇交点) までの角度を表す。
2. (1 の回転後の)x 軸まわりに角度 I だけ回転させる。I は (軌道) 傾斜角と呼ばれ、基準面からの軌道面の傾斜角度を表す。
3. (2 の回転後の)z 軸まわりに角度 Ω だけ回転させる。Ω は昇交点黄経と呼ばれ、基準線 (春分点) から昇交点までの角度を表す。

傾斜角 I が $0° < I < 90°$ のときは順行、$90° < I < 180°$ のときは逆行と呼ばれる。自転

軸の傾斜角とは異なり、太陽系の惑星に逆行のものはない。また近点黄経 ϖ を

$$\varpi = \Omega + \omega \tag{1}$$

と定義する。2.3 節では Ω, ω が同じ平面上にあったので、基準線から天体方向の角度を表していたが、一般には幾何学的には示せない角度になっている。
上に示したステップは 3 つの回転行列

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos I & -\sin I \\ 0 & \sin I & \cos I \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \cos\Omega & -\sin\Omega & 0 \\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

の積で表すことができる。近点から天体の位置までの角度 f[真近点角] も合わせると

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathbf{P}_3\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 \begin{pmatrix} r\cos f \\ r\sin f \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$= r \begin{pmatrix} \cos\Omega\cos(\omega+f) - \sin\Omega\sin(\omega+f)\cos I \\ \sin\Omega\cos(\omega+f) + \cos\Omega\sin(\omega+f)\cos I \\ \sin(\omega+f)\sin I \end{pmatrix} \tag{6}$$

基準面からの座標を完全に決めることができる。また天文学的に短いスケールであれば摂動を無視して決められた楕円運動を続けるとみなせるので、ある時刻における位置を観測できればそれ以降の天体の位置を求めることも (微分方程式を解くことなしに) できる。

時刻の表現

　ここからは天体のある時刻における位置を求める一般的な方法を見ていく。ユリウス日と J2000 元期を用いる。ユリウス日 (JD) とは紀元前 4713 年 1 月 1 日 12h(正午) から数えた経過時間 (日) であり、J2000 元期は 2000 年 1 月 1 日 12h を起点とした時刻である。この間の日数 (J2000 元期のユリウス日) は 2451545.0 日なので、求めたい時刻の JD を用いて J2000 元期からの世紀単位の経過時間 T は

$$T = \frac{\mathrm{JD} - 2451545}{36525} \tag{7}$$

と求められ、これをユリウス世紀数という。

ここでは例として、2024 年 4 月 25 日午後 20 時における木星の位置を計算してみる。この時刻のユリウス世紀数は $T = 0.2431473876$ となる。Appendix.A よりこの時刻での木星軌道のデータとして

$$
\begin{aligned}
&a_j = 5.20351\mathrm{AU}, e_j = 0.0483613, I_j = 1^\circ.30502, \Omega_j = 100^\circ.638 \\
&\varpi_j = 14^\circ.8106, \lambda_j = 251^\circ.557
\end{aligned}
$$

が求められる。このとき平均近点角が $M_j = \lambda_j - \varpi_j = 236^\circ.746$ となり、ケプラー方程式の数値解として (2.80) 式の e の 4 次までを取ると $E = 236^\circ.707$ となる。(2.41) 式より

$$
x_j = -3.10796\mathrm{AU}, \quad y_j = -4.34439\mathrm{AU} \tag{8}
$$

さらに回転行列は

$$
\mathbf{P}_3\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0.966522 & -0.255606 & 0.0223835 \\ 0.255577 & 0.966780 & 0.00420446 \\ -0.0227146 & 0.00165698 & 0.999741 \end{pmatrix} \tag{9}
$$

となる。以上より木星の J2000 基準で計算した座標は

$$
X_j = -1.893459, \quad Y_j = -4.994394, \quad Z_j = 0.0633974 \tag{10}
$$

と求められる。

最後に、今までとは逆に基準の座標系における位置 $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ と速度 $\dot{\mathbf{R}} = (\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})$ から 7 つの軌道要素に変換する手続きを確認する。位置と速度の情報から距離 R, 速さ V, 単位換算質量あたりの角運動量ベクトル $\mathbf{h} = \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}$, 半径方向の変化率 $\dot{R}$, 基準面に射影した $\mathbf{h} = (h_X, h_Y, h_Z)$ を求められる。ここで $\dot{R}$ は

$$
V^2 = \mathbf{R}^2 + R^2 \dot{f}^2 \tag{11}
$$

$$
h = r^2 \dot{f} \tag{12}
$$

より

$$
\dot{R} = \pm\sqrt{V^2 - \frac{h^2}{R^2}} \tag{13}
$$

と求められる。これらの値と中心天体と軌道を動く天体の質量 m_1, m_2 を用いて、これまでの式を用いることで軌道要素を計算できる (省略)。

この手続きを数値的に解くにあたって、定数 $\mu = G(m_1 + m_2)$ を除去することを考える。例えば時間変数を取り替えて

$$\sqrt{\mu} dt = d\bar{t} \tag{14}$$

となるように変数 $\bar{t}$ を与えることができる。ただしこれは運動方程式 $r + \ddot{\mu}\mathbf{r}/r^3 = 0$ より $\mu = 1$ と考える変換と等価である。また $a = 1$ となる単位系をとると $n = 1$ にもなり平均運動単位の運動となり、軌道周期は 2π 単位となる。

参考文献

[1] Carlo Murray. *Solar System Dynamics.* Cambridge University Press, 2000.