Stellar Structure Dynamics[2]

C1SB2064　辻 勇吹樹

2024 年 6 月 17 日

3 The Restricted Three-Body Problem

3.13 Hill's Equation

3.9 節では μ_2 に接近するまで、離心率の変動 (パルス) がなく、ほぼ μ_1 周りのケプラー回転であった。本節では特に、μ_2 に接近した時の粒子の軌道の式を考える。この式は Hill 方程式と呼ばれ、9.5.3 節や 10.5.2 節でも用いられる。**導出は APF でも行なった。**

μ_1, μ_2 の重心を原点とする、回転座標系における粒子の運動方程式は $n = 1$ のもとで (3.16),(3.17) 式より

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - x = -\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} - \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \tag{1}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} - y = -\mu_1 \frac{y}{r_1^3} - \mu_2 \frac{y}{r_2^3} \tag{2}$$

となる。ここで座標原点 $(0, 0)$ を $\mu_2 : (\mu_1, 0)$ に移すと

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - (x + \mu_1) = -\mu_1 \frac{x + \mu_2 + \mu_1}{r_1^3} - \mu_2 \frac{x}{r_2^3} \tag{3}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} - y = -\mu_1 \frac{y}{r_1^3} - \mu_2 \frac{y}{r_2^3} \tag{4}$$

さらに μ_2 が十分小さいものとして $\mu_1 \approx 1$ とすると

$$\ddot{x} - 2\dot{y} - (x + 1) = -\frac{x + 1}{r_1^3} - \mu_2 \frac{x}{r_2^3} \tag{5}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} - y = -\frac{y}{r_1^3} - \mu_2 \frac{y}{r_2^3} \tag{6}$$

最後に、μ_2 に十分近いという近似を加える。3.6 節より L_1, L_2 点は μ_2 からヒル半径 $r_H \propto \mu_2^{1/3}$ ほど離れた位置にあるので x, y も $\mathcal{O}\left(\mu^{1/3}\right)$ にあるとみなす。$\Delta = r_2$ も同じ

オーダーにあり、高次の項は無視する。このとき原点が μ_1 にあると思えば $\Delta^2 = x^2 + y^2$ より

$$r_1 = \left[(x + \mu_1 + \mu_2)^2 + y^2\right]^{1/2} \tag{7}$$
$$= \left[(\mu_1 + \mu_2)^2 + \Delta^2 + 2(\mu_1 + \mu_2)x\right]^{1/2} \tag{8}$$
$$= \left[1 + \Delta^2 + 2x\right]^{1/2} \tag{9}$$
$$\approx (1 + 2x)^{1/2} \tag{10}$$

と近似できる。したがって

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} - (x+1) = -(x+1)(1-3x) - \mu_2 \dfrac{x}{\Delta^3} & (11) \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - y = -y(1-3x) - \mu_2 \dfrac{y}{\Delta^3} & (12) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = \left(3 - \dfrac{\mu_2}{\Delta^3}\right)x & (13) \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = -\mu_2 \dfrac{y}{\Delta^3} & (14) \end{cases}$$

と近似できて、これを Hill 方程式と呼ぶ。特に式 (40) の右辺が 0 のとき、すなわち

$$\Delta_H = \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^{1/3} \tag{15}$$

を Hill 球と呼び、平衡状態における関係式となっている (Darwin-Radau Relation→4.6 節)。また有効ポテンシャルの -1 倍の勾配は 3.2 節より与えられた運動方程式の右辺で与えられ, ヤコビ定数は 3.3 節における定義を用いると

$$U_H = \frac{3}{2}x^2 + \frac{\mu_2}{\Delta} \tag{16}$$
$$C_H = 2U - v^2 = 3x^2 + 2\frac{\mu_2}{\Delta} - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 \tag{17}$$

と求められる。これは (3.29) 式の完全な形からも導出できる。

$$C_J = x^2 + y^2 + 2\left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2}\right) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 \tag{18}$$
$$\approx (x+1)^2 + y^2 + 2\left(\frac{1}{r_1} + \frac{\mu_2}{\Delta}\right) - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 \quad \text{原点移動} + (\mu_1 \approx 1) \tag{19}$$
$$\approx (x+1)^2 + y^2 + 2\left\{\left(1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\Delta^2\right) + \frac{\mu_2}{\Delta}\right\} - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 \tag{20}$$
$$(r_1 = (1 + 2x + \Delta^2)^{1/2})$$
$$= 3x^2 + 2\frac{\mu_2}{\Delta} - \dot{x}^2 - \dot{y}^2 + 3 \tag{21}$$

となり、(おそらく) 原点を移動したことによる定数項のズレを除き一致する。

また L_1, L_2 の平衡点は Hill 球と同様に時間変化が 0 であるとすれば求めることができて、Hill 球の定義と同じになる。このときのヤコビ定数は

$$C_H = 3\Delta_H^2 + 2\frac{\mu_2}{\Delta_H} = 3^{4/3}\mu_2^{2/3} \tag{22}$$

となり、3.6 節での結果と定数項を除き $\mathcal{O}\left(\mu_2^{2/3}\right)$ で一致する。一方

$$C_H = \zeta\mu_2^{2/3}, \quad \zeta < 3^{4/3} \tag{23}$$

のときは平衡点からずれるため L_1, L_2 を通らない軌道で運動を行い、3.10 節 (3.161) 式で見たように horseshoe 軌道となる。

ここで更に zero-velocity curve と horseshoe 軌道の関係も 3.10 節の結果と同じになることを確認する。ヤコビ定数に式 (23) を代入し、簡単のために $\dot{x} = \ddot{x} = \ddot{y} = 0$、$\Delta$ が大きい (Hill 方程式の導出と矛盾しないようにオーダーは同じはず) とすると

$$\dot{y}^2 = 3x^2 - \zeta\mu_2^{2/3} \tag{24}$$

とできる。したがって zero-velocity curve は

$$x_{zv}^2 = \frac{1}{3}\zeta\mu_2^{2/3} \tag{25}$$

となる。一方 $n^2a^3 = \mu = 1$ なので両辺の時間微分をとると上の近似のもとで $\dot{y} = -(3/2)x$ となる。したがって

$$x^2 = \frac{4}{3}\zeta\mu_2^{2/3} \tag{26}$$

となり、3.10 節と同様に $x = 2x_{zv}$ という結果が得られた。

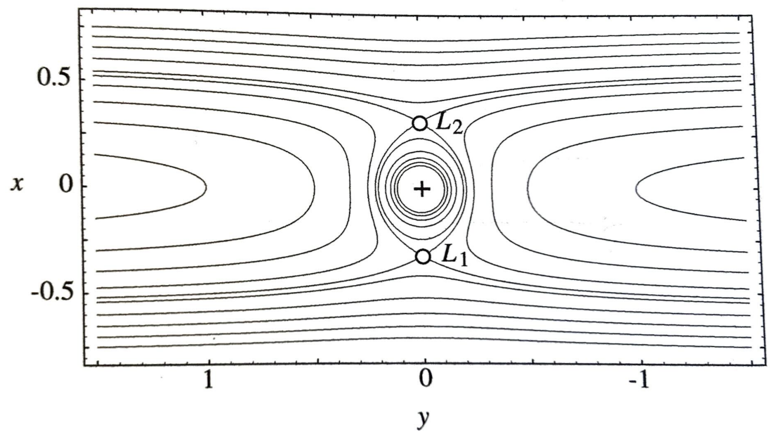

Fig. 3.28. The zero-velocity curves defined by the equation $C_{\mathrm{H}} = 2U_{\mathrm{H}}$ in the vicinity of the Lagrangian points L_1 and L_2 for a mass $\mu_2 = 0.1$. Note that in the Hill's approximation the equilibrium points are now equidistant from the mass μ_2 (denoted by the cross at the origin).

図 1

続いて、μ_2 に近接する前後での軌道要素の変化を、２つの方法で調べる。
まず Tisserand's relation(3.4 節) を用いる。円軌道からの微小なズレを Δ をつけて表すことにすると、(3.47) 式より

$$\frac{1}{2a} + \sqrt{a(1-e^2)}\cos I = \frac{1}{1+\Delta a} + 2(1+\Delta a)^{1/2}(1-\Delta e^2)^{1/2} \approx const. \tag{27}$$

となる。微小量の 2 次まで展開すると

$$(1-\Delta a+\Delta a^2) + 2\left(1+\frac{\Delta a}{2}-\frac{\Delta a^2}{8}\right)\left(1-\frac{\Delta e^2}{2}\right) \approx const. \tag{28}$$

$$\frac{3}{4}\Delta a^2 - \Delta e^2 \approx const. \tag{29}$$

という関係式が与えられる。軌道が対称であれば、離心率は μ_2 との接近前後で変化しない。
続いて Hill 方程式を用いて、この $const.$ を求める。Δ が大きいとき

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = 3x \tag{30}$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = 0 \tag{31}$$

となる。このときヤコビ定数の関係式から

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 3x^2 - \zeta\mu_2^{2/3} \tag{32}$$

となる。ここで particle の軌道に 2.6 節での guiding center approximation を適用する。μ_2 から x 方向に Δa の定数だけ離れている epicenter に対して e の振幅で運動しているとする。すなわち $x = \Delta a + e\cos t$ と書くと式 (31) より $\ddot{y} = -2e\cos t$ となる。また式 (30) より

$$\dot{y} = -\frac{3}{2}\Delta a - 2e\sin t \tag{33}$$

となる。$n^2a^3 = 1$ より epicenter 軌道の y 方向の速度は $-(3/2)\Delta a$ となる。したがって $-2e\sin t$ が epicenter からの相対運動となる。これは 2.6 節での guidin center 周りの楕円の式に一致している。式 (32) より

$$(e\cos t)^2 + \left(-\frac{3}{2}\Delta a - 2e\sin t\right)^2 = 3(\Delta a + e\cos t)^2 - \zeta\mu_2^{2/3} \tag{34}$$

$$\frac{3}{4}\Delta a^2 - e^2 = \zeta\mu_2^{2/3} \tag{35}$$

となるので、定数部はヤコビ定数である。

続いて、粒子の軌道、厳密には epicenter の軌道の最も μ_2 に近づくときの距離を求める。式 (35) で $e = 0$ とすると epicenter の軌道は

$$|\Delta a_0| = 2\left(\frac{\zeta}{3}\right)^{1/2}\mu_2^{1/3} \tag{36}$$

最も接近するときは $x = 0, \dot{y} = 0$ となるので、このときの $\dot{x}_{min}, \Delta_{min}$ の関係は、ヤコビ定数の関係式より

$$\dot{x}_{min}^2 = 2\frac{\mu_2}{\Delta_{min}} - \zeta\mu_2^{2/3} \tag{37}$$

となる。Dermott&Murray(1981)[1] によると、数値計算上で horseshoe 軌道の円軌道を描くときの速度 $\dot{y}_0^2 \approx \zeta\mu_2^{2/3}$ は最接近時の速度 $\dot{x}_{min}^2$ に比べて十分大きいので

$$y_{min} = \frac{2\mu_2}{\dot{x}_{min}^2 + \zeta\mu^{2/3}} \approx \frac{2}{\zeta}\mu^{1/3} \tag{38}$$

$$\approx \frac{8}{3}\Delta a_0^2\mu_2 \tag{39}$$

となる。(**教科書と式が少し異なる。**)guiding center の zero-velocity curve は周転円運動も含めた軌道のものとは異なることに注意する。

最後に、Hill 方程式を「規格化」する。元の Hill 方程式は

$$
\begin{cases}
\ddot{x} - 2\dot{y} = \left(3 - \dfrac{\mu_2}{\Delta^3}\right)x & (40)\\
\ddot{y} + 2\dot{x} = -\mu_2 \dfrac{y}{\Delta^3} & (41)
\end{cases}
$$

となる。$x \to x'(\mu_2/3)^{1/3}, y \to y'(\mu_2/3)^{1/3}, \Delta \to \Delta'(\mu_2/3)^{1/3}$ とすると方程式は

$$
\begin{cases}
\ddot{x}' - 2\dot{y}' = 3x'\left(1 - \dfrac{1}{\Delta'^3}\right) & (42)\\
\ddot{y}' + 2\dot{x}' = -3\dfrac{y'}{\Delta'^3} & (43)
\end{cases}
$$

としてパラメータを消すことができる。$(\mu_2/3)^{1/3}$ は Hill 球の定義であるから、この規格化は μ_2 から L_1, L_2 までの距離を 1 とする変換と言える。図 3.30 は遠いところから円軌道で μ_2 に接近するときの軌道を図示している。次のような特徴が見られる。

- ほとんど μ_2 軌道と同じ軌道で接近するとき ($|x'| < 1.7$)
  horseshoe 軌道を描く。この範囲で x' 座標から 0 からずれるほど接近によって大きな離心率を得て大きく内側または外側に変化している。
- $|x'|$ が大きいとき
  大きな離心率を受け取って大きな周転円運動を行なう。
- $|x'|$ がさらに大きいとき
  μ_2 を通過して離心率の変化もほぼない。

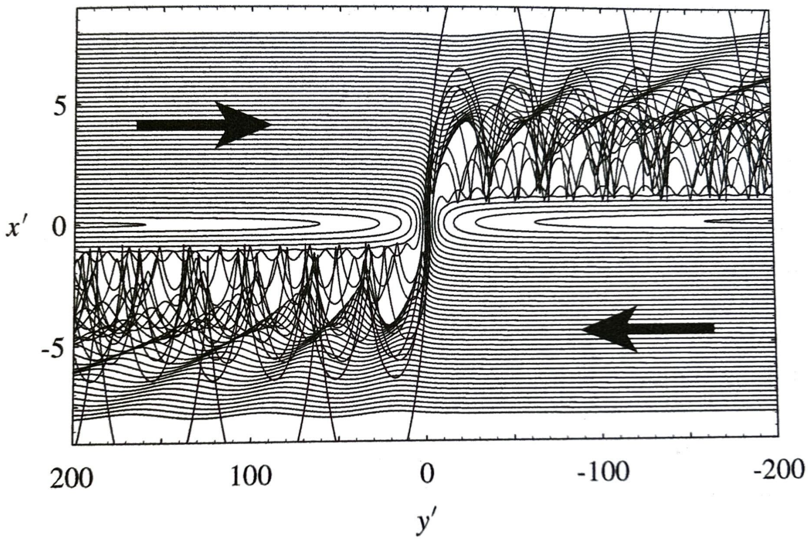

Fig. 3.30. Particle trajectories obtained by solving the scaled form of Hill's equations. The perturbing mass is located at the origin and the L_1 and L_2 points are at $y' = 0$, $x' = \pm 1$. The particles were all started with $\dot{x}' = 0$ (i.e., in circular orbits) at $y' = \pm 200$. The arrows indicate their direction of motion before encountering the perturber.

図 2

参考文献

[1] Stanley F Dermott and Carl D Murray. The dynamics of tadpole and horseshoe orbits: I. theory. *Icarus*, 48(1):1–11, 1981.

[2] Carlo Murray. *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press, 2000.