

# Stellar Structure Dynamics[1]

C1SB2064 辻 勇吹樹

2024年5月28日

## 3 The Restricted Three-Body Problem

### 3.8 Motion near $L_4$ and $L_5$

軌道面と基準面

$L_4, L_5$  周りの運動

長周期の平衡点周りの epicenter の楕円運動と、短周期の epicenter 周りの周天円運動に分離して考えることができる。

前節では、小さな  $\mu_2$  を用いれば平衡点  $L_4, L_5$  周りは線形的に安定であることが確かめられた。その際、2つの角振動数  $\lambda_{1,2}, \lambda_{3,4}$  が与えられた。

$$|\lambda_{1,2}| = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 27(1 - \mu_2)\mu_2}}{2}} \quad (1)$$

$$|\lambda_{3,4}| = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 27(1 - \mu_2)\mu_2}}{2}} \quad (2)$$

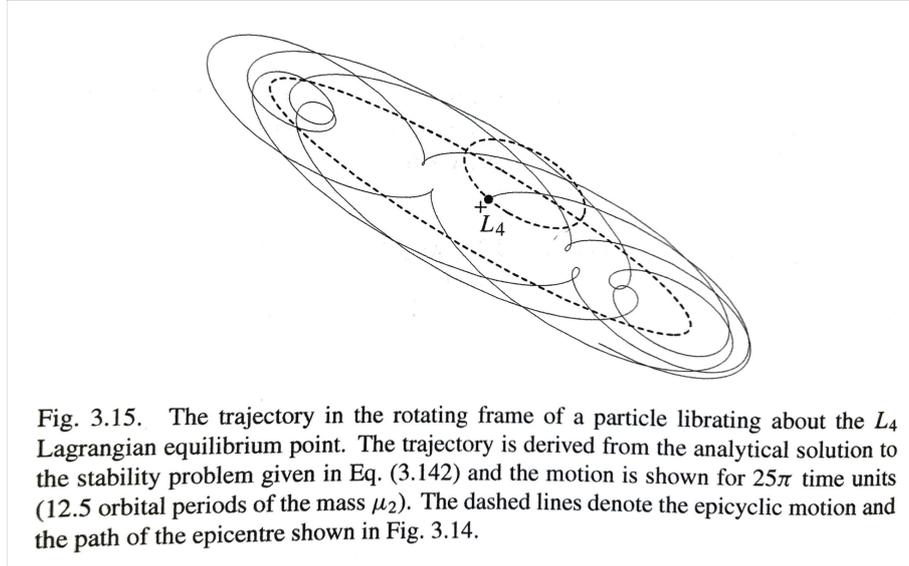
特に、 $\mu_2 \rightarrow 0$  で  $|\lambda_{1,2}| \rightarrow 1, |\lambda_{3,4}| \rightarrow 0$  となる。 $|\lambda_{1,2}| > |\lambda_{3,4}|$  であるから、 $L_4, L_5$  周りの運動は次のように2つの運動に分離して考えることができる。

- 周期  $2\pi/|\lambda_{1,2}| \approx 2\pi$  の短周期運動
- 周期  $2\pi/|\lambda_{3,4}|$  の平衡点周りの長周期運動 [秤動 (2.6 節)]

この2つの運動の重ね合わせは、

平衡点の周りを長周期運動する点 (epicenter) の周りを短周期 (周天円) 運動している

とみなすことができる。逆でも考えることができる。Fig. 3.15 は実際に式 (3.142) の解を図示したものである。



式 (3.142) は  $\mu_1 \rightarrow \mu_2$  を  $x$  軸にとっているので、 $L_4$  が  $x$  軸から  $60^\circ$  傾いた位置にある。式を分かりやすくするために、 $30^\circ$  の回転行列をかけて  $y$  軸上にとってやる。すなわち

$$\begin{pmatrix} X'(t) \\ Y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$(4)$$

とすると

$$X'(t) \approx 3.54 \times 10^{-4} \sin 0.268t - 9.85 \times 10^{-5} \sin 0.963t \quad (5)$$

$$Y'(t) \approx 6.23 \times 10^{-4} \cos 0.268t - 4.86 \times 10^{-5} \cos 0.963t \quad (6)$$

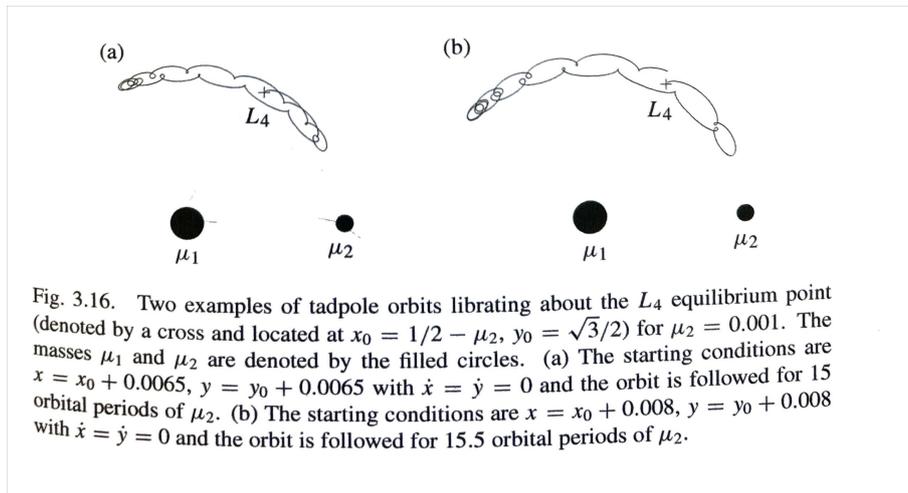
となり、2つの楕円の式が組み合わさっていることがよく分かる。第1項が平衡点周りの運動、第2項が周天円運動である。ここでは  $L_4$  および epicenter が楕円の中心になっている。3.10節では zero-velocity curves の式を与え、この式によって epicenter の楕円軌道の式が決まること (特に  $b/a = (3\mu_2)^{1/2}$ ) が示される。

2.6節の guiding center approximation では、式 (2.99) より天体から guiding center まで (焦点に半径が軌道長半径の円運動をする点) の距離が長軸  $2ae$ 、短軸  $ae$  の楕円運動で記述することができた。式 (3.153)(=式 (5),(6)) を見ると、第2項の周天円運動の軌道短半径  $b$  と軌道長半径  $a$  の比  $9.85 : 4.86 \approx 2 : 1$  とおおよそ見なせるので、guiding

center と同様に考えることができる。ここでは地球と月の距離 ( $= a$ ) を 1 としているので、この  $L_4$  周りの周天円運動は  $e \approx 5 \times 10^{-5}$  の楕円運動を行なっていることが分かる。実際にはこの離心率  $e$  は変動して接触軌道要素としても考える必要があり、詳しくは 7 章で述べられる。また上手い初期条件を与えれば、平衡点周りの運動をほぼ周天円を考えずに epicenter の運動として考えることができる。

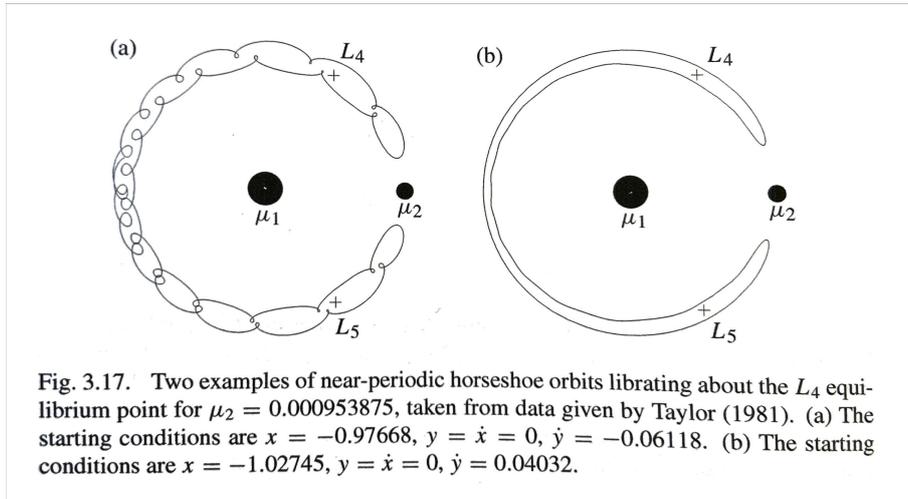
### 3.9 Tadpole and Horseshoe Orbits

3.7-3.8 節では平衡点周りの摂動 ( $\approx 10^{-5}$ ) を考えていたが、より一般的な運動を数値計算によって求めることができる。図 3.16 はそれぞれ平衡点から 0.0065, 0.008 だけ  $x, y$  方向にずらしたときの軌道である。 $L_5$  でも同様になる。

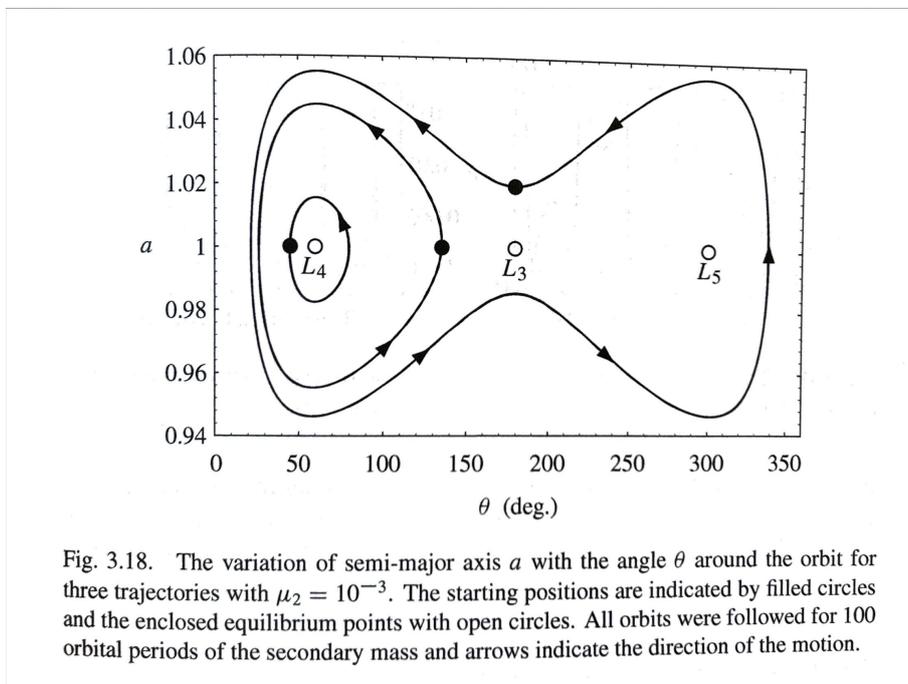


この伸びた (elongated) 楕円軌道から、tadpole(おたまじゃくし) 軌道と呼ばれている。 $L_4$  は  $\mu_1$  との距離が  $\mu_1 - \mu_2$  間の距離と等しいので、全体としては  $\mu_1$  を中心とする円運動に近い運動をしている。

さらに初期の平衡点からの距離を大きくしていくと、やがて 2 つの平衡点  $L_4, L_5$  を取り囲むようになる。これは horseshoe(馬蹄形) 軌道と呼ばれ、図 3.17 に図を示している。これらは図 3.9 の zero-velocity curves と同じような形となっており、3.10 節でその関係性を述べている。図 3.16 と 3.17 の軌道はどちらも初速度 0 なので関係はあるが、特にヤコビ定数が平衡点における値よりも小さい、すなわち粒子のエネルギーが平衡点のポテンシャルの壁を超える場合、粒子は自由に運動することができる。

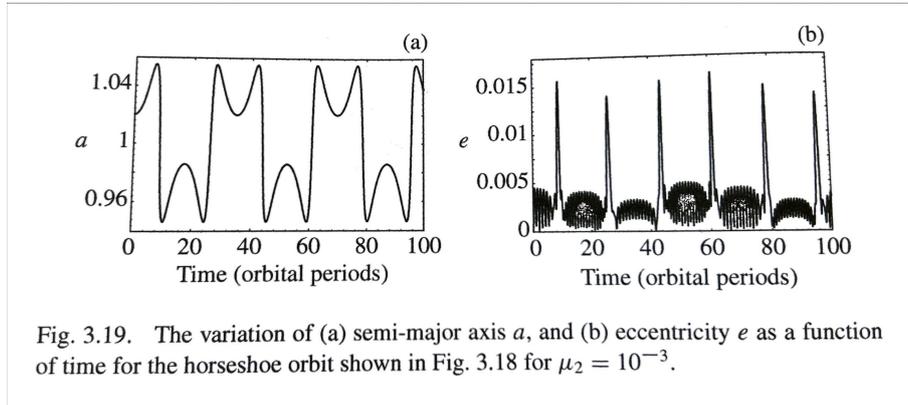


太陽-木星系と同じような  $\mu_2 = 10^{-3}$  で  $e \approx 0$  としたときの計算結果が図 3.18 に示されている。軌道による軌道長半径の変化は  $L_4, L_5$  で最大となっている。後で示す  $\mu_2 = 10^{-6}$  の場合と異なり、軌道はよく見ると  $L_3$  について非対称となっていることが分かる。これは  $\theta = 180^\circ$  での最も近いときと最も遠いときの軌道の中間には  $L_3$  がいないためである。また  $e \approx 0$  のため  $a \approx r$  であり、図 3.16, 3.17 で見たようなループの構造は見られない。



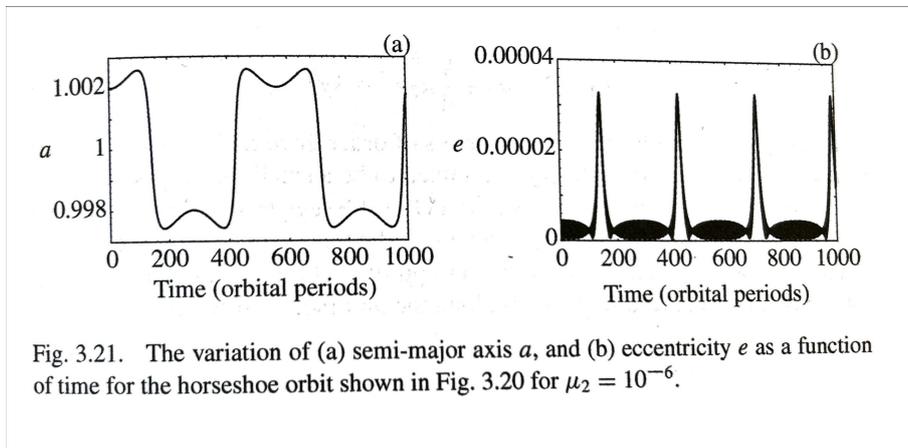
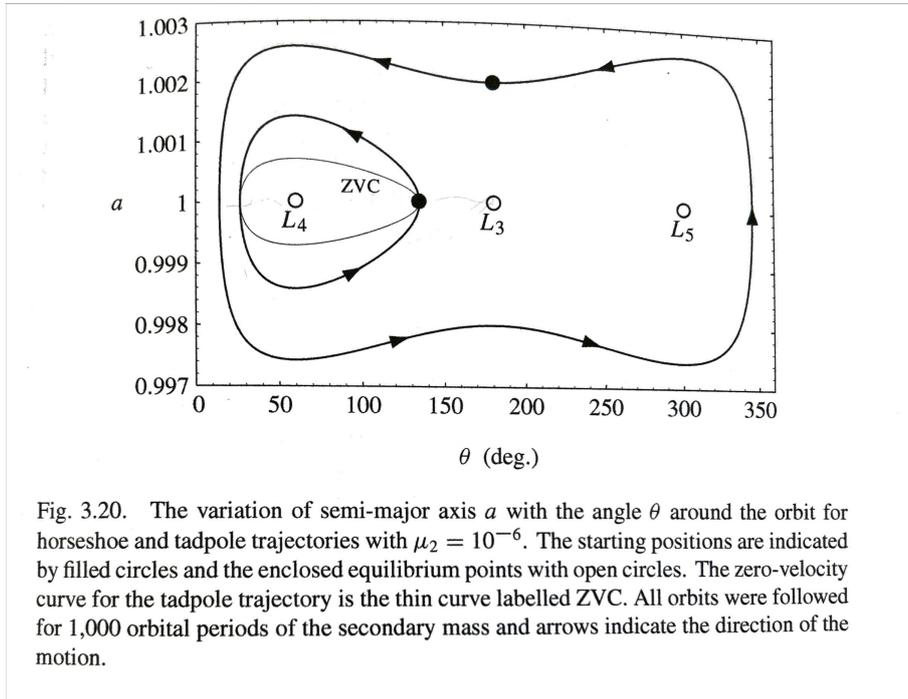
また同じく  $\mu_2 = 10^{-3}$  における  $a, e$  の変化が図 3.19 に示されている。図 3.18 の上側

を通る時に  $a$  が大きくなり、下側で  $a$  が小さくなる。この接続で  $e$  は大きく振れている。前に述べた  $L_3$  に対する非対称性があったとしても、 $\Delta a$  は周期的に変化が続いている。この安定性は 3.15 節でより詳しく述べられている。



particle の周転円運動によって離心率  $e$  は  $\mu_2$  の影響を受けて振動する。特に  $L_4, L_5$  から  $\mu_2$  に近づく時に離心率は大きく変動し、近づくときの周転円の phase によってそのパルスも変化する。一方、軌道長半径  $a$  は近づくときの phase によらず、上で述べたようにある程度対称性が満たされている。

図 3.20, 3.21 には  $\mu_2 = 10^{-6}$  とした場合を図示している。 $\mu_2 = 10^{-3}$  の場合と同様に  $L_4, L_5$  の位置で最も大きな軌道の変化が見られる。一方、 $L_3$  に対する対称性はより見られるようになっており、 $L_3$  が内回りと外回りの軌道の間にはほぼ位置していることを表している。また  $L_4$  のみを通る tadpole 軌道は、 $L_4, L_5$  両方を通る horseshoe 軌道に比べ  $a$  の変化の割合が小さくなっていることが分かる。tadpole 軌道は  $\mu_2$  が小さくなるにつれて軌道の変化が小さくなる (円軌道に近くなる) といえる。zero-velocity curves の曲線 (ZVC) と比較して、幅は常に 2 倍になる。図 3.21 を見れば  $\Delta a$  が非常に対称かつ保存されていることが分かる。これは horseshoe 軌道は  $\mu_2$  が小さいほど安定であることを示している。



$\mu_1 - \mu_2$  軌道の内側と外側の粒子の軌道を円軌道に近づけると、解析と数値的な計算によって平衡点からの距離が大きくなるにつれて tadpole から horseshoe 軌道へと変化することは確かめられた。一方円軌道と異なる場合は内側と外側を巡回 (circulate) されている。

## 参考文献

[1] Carlo Murray. *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press, 2000.