Stellar Structure Dynamics[1]

C1SB2064　　辻 勇吹樹

2024 年 6 月 23 日

3 The Restricted Three-Body Problem

Exercise Question 3.2

問題:

Lagrange 点 L_1, L_2, L_3 で不安定な条件 $\bar{A} > 1$(p.91 参照) が満たされていることを確認せよ。L_3 では更に不安定を引き起こしている固有値の実部を近似的に求めよ。近似は $\mathcal{O}(\alpha, \beta)$ までをとり、

$$\alpha = \left(\frac{\mu_2}{3\mu_1}\right)^{1/3}, \quad \beta = -\frac{7}{12}\frac{\mu_2}{\mu_1} \tag{1}$$

とする。

解答:

$\bar{A}$ をそれぞれの Lagrange 点において α のみで書き下すことを考える。上の定義より

$$\alpha^3 = \frac{\mu_2}{3\mu_1} \tag{2}$$

$$\mu_1 = \frac{1}{3\alpha^3 + 1} \tag{3}$$

$$\mu_2 = \frac{3\alpha^3}{3\alpha^3 + 1} \tag{4}$$

を用いる。

まず L_1 を考える。$r_1 \approx 1-\alpha, r_2 \approx \alpha$ より $\mathcal{O}(\alpha)$ までをとると

$$\begin{aligned}
\bar{A}_1 &= \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} && (5)\\
&= \frac{1}{(3\alpha^3+1)(1-\alpha)^3} + \frac{3\alpha^3}{(3\alpha^3+1)\alpha^3} && (6)\\
&\approx \frac{1}{(3\alpha^3+1)(1-3\alpha)} + \frac{3}{(3\alpha^3+1)} && (7)\\
&\approx 1+3\alpha+3 && (8)\\
&\approx 4+3\alpha && (9)
\end{aligned}$$

となり、1 よりも大きくなる。

次に L_2 を考える。$r_1 \approx 1+\alpha, r_2 \approx \alpha$ より同様にして

$$\begin{aligned}
\bar{A}_2 &= \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} && (10)\\
&= \frac{1}{(3\alpha^3+1)(1+\alpha)^3} + \frac{3\alpha^3}{(3\alpha^3+1)\alpha^3} && (11)\\
&\approx \frac{1}{(3\alpha^3+1)(1+3\alpha)} + \frac{3}{(3\alpha^3+1)} && (12)\\
&\approx 1-3\alpha+3 && (13)\\
&\approx 4-3\alpha && (14)
\end{aligned}$$

$\alpha \ll 1$ より L_2 の場合も 1 より大きくなる。

最後に L_3 の場合を考える。ここで式 (1) より

$$\mu_1 = \frac{7}{7-12\beta} \tag{15}$$

$$\mu_2 = \frac{-12\beta}{7-12\beta} \tag{16}$$

となることを用いる。$r_1 \approx 1+\beta, r_2 \approx 2+\beta$ より

$$\begin{aligned}
\bar{A}_3 &= \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} && (17)\\
&= \frac{7}{(7-12\beta)(1+\beta)^3} + \frac{-12\beta}{(7-12\beta)(2+\beta)^3} && (18)\\
&\approx \frac{7}{(7-12\beta)(1+3\beta)} + \frac{12\beta}{(7-12\beta)(8+12\beta)} && (19)\\
&\approx \frac{7}{7+9\beta} + \frac{-12\beta}{56} && (20)\\
&\approx 1 - \frac{9}{7}\beta - \frac{3}{14}\beta && (21)\\
&= 1 - \frac{3}{2}\beta && (22)
\end{aligned}$$

$-1 \ll \beta < 0$ では 1 よりも大きくなる。このとき固有値方程式は (3.137) 式 (p.90) より

$$\lambda^4 + (2-\bar{A})\lambda^2 + (1+\bar{A}-2\bar{A}^2) = 0 \tag{23}$$

$$\lambda^4 + \left(1+\frac{3}{2}\beta\right)\lambda^2 + \frac{9}{2}\beta = 0 \tag{24}$$

となる。これを $\mathcal{O}(\beta)$ で計算すると

$$\begin{aligned}
\lambda^2 &\approx \frac{-\left(1+\frac{3}{2}\beta\right) \pm \sqrt{(1+3\beta) - 4\cdot\frac{9}{2}\beta}}{2} && (25)\\
&= \frac{-\left(1+\frac{3}{2}\beta\right) \pm \sqrt{1-15\beta}}{2} && (26)\\
&\approx \frac{-\left(1+\frac{3}{2}\beta\right) \pm \left(1-\frac{15}{2}\beta\right)}{2} && (27)\\
&= -\frac{9}{2}\beta, -1+3\beta && (28)
\end{aligned}$$

と近似できる。$\mu_2 \approx -\frac{12}{7}\beta$ より不安定をもたらす実の固有値は

$$\lambda \approx \pm\sqrt{-\frac{9}{2}\beta} = \pm\sqrt{\frac{21}{8}\mu_2} \tag{29}$$

と求められる。$0 < \alpha, -\beta < 1$ における $\bar{A}$ の値を図 1 に載せている。

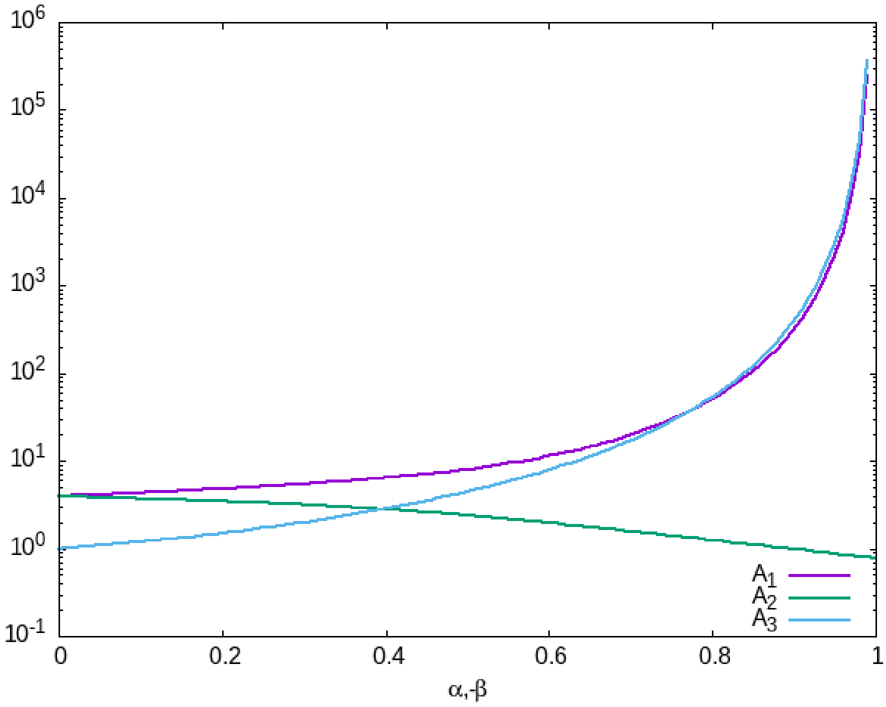

図 1　Lagrange 点 L_1, L_2, L_3 における $\bar{A}$ の値。$\beta < 0$ より $-\beta$ を横軸にとっている。

参考文献

[1] Carlo Murray. *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press, 2000.