

Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability[1]

C1SB2064 辻 勇吹樹

2024年11月26日

2. 下から温められた流体の層の熱的不安定

I The BÉNARD PROBLEM

2-14. 変分原理の熱力学的重要性

2-13節では、変分原理を用いて $\delta R = 0$ となるような F, W の満たすべき方程式を導出した。本節ではこうして得られたレイリー数 R の物理的な意味について検討する。

First we observe that when marginal conditions prevail, the z -component of the vorticity vanishes. This follows from equation (94); for, when $\sigma = 0$,

$$(D^2 - a^2)Z = 0; \quad (170)$$

and this equation does not allow a non-zero solution which satisfies the boundary conditions (cf. equation (96)) on Z . [The vanishing of Z under stationary conditions follows even more generally from equation (73); for, when $\partial\zeta/\partial t = 0$, $\nabla^2\zeta = 0$ and as is well known, Laplace's equation does not allow non-zero solutions which (or, the normal derivatives of which) vanish on a closed boundary.] Hence, in this case, the solutions for the horizontal components of the velocity given by equations (110) and (111) become

$$u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \quad \text{and} \quad v = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y}. \quad (171)$$

安定から不安定に移る臨界条件 ($\sigma = 0$) における (170) 式で、 $a = kd$ が実なので、 Z は \exp の解となり、 $z = 0, 1$ で $Z = 0$ (*rigid*) または $dZ/dz = 0$ (*free*) となるような非ゼロの解がない。(73) 式に戻ると $\nabla^2\zeta = 0$, $\zeta = 0$ (*rigid*), $d\zeta/dz = 0$ (*free*) となる。1次元の場合と同様に、一般の場合においてもディリクレ、ノイマン条件で0を課すと非ゼロになる解は存在しない。

ノイマン条件 ($d\zeta/dz = 0$) で非ゼロになる解がないことを示す。グリーンの定理より

$$\int_V \{\Phi \nabla^2 \Phi + (\nabla \Phi)^2\} dV = \int_S \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} \right) \quad (1)$$

S をノイマン条件となる境界面に取ると

$$\int_V (\nabla \Phi)^2 dV = 0 \Rightarrow \nabla \Phi = 0 \Rightarrow \Phi = \text{const.} \quad (2)$$

となる。非ゼロとは限らないが、領域内では常に一定値をとることになる。

ディリクレ条件 ($\zeta = 0$) でも非ゼロになる解がないことを示す。グリーンの定理より V 内における、原点から R の距離での Φ の値は

$$\Phi(R) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} \nabla^2 \Phi dV - \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\Phi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] dS \quad (3)$$

となる。同様に S をディリクレ条件となる境界面に取ると

$$\Phi(R) = 0 \quad (4)$$

となる。ただし Laplace 方程式から

$$\int_V \nabla^2 \Phi dV = \int_S \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = 0 \quad (5)$$

となることを用いた。したがって、ノイマン条件でもディリクレ条件でも境界で一定値を取るならば内部も一樣になる。したがって (110),(111) 式は (171) 式にかんたんにできる。

Now consider the average rate of viscous dissipation of energy by a unit (vertical) column of the fluid. This is given by†

$$\begin{aligned}\epsilon_\nu &= -\frac{\rho\nu}{d^2} \int_0^1 \{ \langle w \nabla^2 w \rangle + \langle u \nabla^2 u \rangle + \langle v \nabla^2 v \rangle \} dz \\ &= -\frac{\rho\nu}{d^2} \int_0^1 \{ \langle w(D^2 - a^2)w \rangle + \langle u(D^2 - a^2)u \rangle + \langle v(D^2 - a^2)v \rangle \} dz, \quad (175)\end{aligned}$$

where angular brackets signify that the quantity enclosed is averaged over the horizontal plane. For w , u , and v given by equations (172) and (174), we have

$$\begin{aligned}\epsilon_\nu &= -\frac{\rho\nu}{4d^2} \int_0^1 \left\{ W(D^2 - a^2)W + \frac{a_x^2}{a^4} DW(D^2 - a^2)DW + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_y^2}{a^4} DW(D^2 - a^2)DW \right\} dz \\ &= -\frac{\rho\nu}{4a^2d^2} \int_0^1 \{ a^2 W(D^2 - a^2)W + DW(D^2 - a^2)DW \} dz. \quad (176)\end{aligned}$$

Integrating by parts the second term on the right-hand side, we obtain (cf. equation (132))

$$\epsilon_\nu = \frac{\rho\nu}{4a^2d^2} \int_0^1 [(D^2 - a^2)W]^2 dz = \frac{\rho\nu}{4a^2d^2} \int_0^1 G^2 dz. \quad (177)$$

粘性の項は、(55) 式より Boussinesq 近似のもとで $\rho\nu\nabla^2 u_i$ で表された。この単位 z column(柱) ごとのエネルギー散逸率を計算するには、次のステップで計算を組み立てればよい。

1. 散逸を考えるので -1 倍する。
2. 長さの次元は、 ν 以外すべて d で無次元化する。単位 column あたりのエネルギー密度の次元は $[J/m^2/s]$ であるから結果的には d^2 で割る。
3. 7 節で体積 V のエネルギー収支の計算をしたときと同じように u_i をかけて z 軸方向に積分する。ただし被積分関数は xy 方向には平均化されている必要がある。

以上より (175) 式になる。

$$\epsilon_\nu = -\frac{\rho}{d^2} \nu \int_0^1 \langle u_i \nabla^2 u_i \rangle dz \quad (6)$$

浮力を表す項は、同様に (55) 式より $g\alpha\theta\lambda_i$ であった。ここでも同じステップを考えるこ

とで (178),(179) 式のようにできる。

静止状態では、運動エネルギー → 内部エネルギーの粘性散逸と、逆プロセスの浮力がバランスする。これを Appendix I から示す。密度と温度を

$$\Pi = \Pi_0(z) + \varpi(x_i, t), \quad T = T_0(z) + \theta(x_i, t) \quad (7)$$

$$\langle u_i \rangle = 0, \quad \langle \Pi \rangle = \Pi_0(z), \quad \langle T \rangle = T_0(z) \quad (8)$$

($\Pi = p/\rho_0$, エンタルピー) として z 方向の依存性を残した上で (43) 式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - g \left(1 + \frac{\delta \rho}{\rho_0}\right) \lambda_i + \nu \nabla^2 u_i \quad (9)$$

の両辺の平均をとると ($\delta \rho = -\alpha \rho_0 [T_0(z) - T_0(0) + \theta]$)

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) \right\rangle = -\frac{\partial \Pi_0}{\partial x_i} - g \lambda_i \{1 - \alpha [T_0(z) - T_0(0)]\} \quad (10)$$

$$\frac{d}{dz} (\Pi_0 + \langle w^2 \rangle) = -g \{1 - \alpha [T_0(z) - T_0(0)]\} \quad (11)$$

となる。式 (10) は z 成分しか値を持たず、具体的に書くと式 (11) のようになる。また (43) 式の両辺に u_i をかけて xy 平面の平均をとり、 z 方向に積分する。

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^d \langle u_i^2 \rangle dz = - \int_0^d \left\langle u_i \left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + g \left(1 + \frac{\delta \rho}{\rho_0}\right) \lambda_i \right\} \right\rangle dz + \nu \int_0^d \langle u_i \nabla^2 u_i \rangle dz \quad (12)$$

式 (11) を用いると右辺の第 1 項は

$$- \int_0^d \left\langle u_i \left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + g \left(1 + \frac{\delta \rho}{\rho_0}\right) \lambda_i \right\} \right\rangle dz = \int_0^d \left\langle u_i \left\{ \frac{\partial \varpi}{\partial x_i} + \frac{d \langle w^2 \rangle}{dz} + g \alpha \theta \lambda_i \right\} \right\rangle dz \quad (13)$$

$$= \int_0^d \left\langle u_i \frac{\partial \varpi}{\partial x_i} \right\rangle dz + g \alpha \int_0^d \langle \theta w \rangle dz \quad (14)$$

とできる。最後の等号は、 $d \langle w^2 \rangle / dz$ が平均の外に出せることから 0 になる。第 1 項は境界で摂動が 0 になること、速度の発散が 0 になる近似から

$$\int_0^d \left\langle u_i \frac{\partial \varpi}{\partial x_i} \right\rangle dz = [\langle u_i \varpi \rangle]_0^d - \int_0^d \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \varpi \right\rangle dz = 0 \quad (15)$$

となって落ちる。したがって

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^d \langle u_i^2 \rangle dz = g \alpha \int_0^d \langle \theta w \rangle dz + \nu \int_0^d \langle u_i \nabla^2 u_i \rangle dz \quad (16)$$

となる。定常のときは右辺のみが残り、これは粘性散逸と浮力のバランスを表している。

こうして変分原理を導くレイリー数と同じ式が与えられる。したがって粘性散逸と浮力がバランスする最初 (最小) の温度勾配で不安定性がもたらされる。

2-15. 固有値問題の厳密解

それぞれの境界条件で固有値方程式を実際に解く。

(a) *The solution for two free boundaries*

In this case the boundary conditions (186) require

$$W = D^2W = D^4W = 0 \quad \text{for } z = 0 \text{ and } 1; \quad (189)$$

from the equation satisfied by W (namely (128)), it now follows that $D^6W = 0$ for $z = 0$ and 1 . From equation (128) differentiated twice with respect to z , we next conclude that $D^8W = 0$ is also zero for $z = 0$ and 1 . By further differentiations of equation (128), we can conclude, successively, that all the even derivatives of W vanish on the boundaries.

Thus $D^{(2m)}W = 0$ for $z = 0$ and 1 and $m = 1, 2, \dots$. (190)

From this it follows that the required solutions must be

$$W = A \sin n\pi z \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (191)$$

where A is a constant and n is an integer. Substitution of this solution in equation (128) leads to the *characteristic equation*

$$R = (n^2\pi^2 + a^2)^3/a^2. \quad (192)$$

For a given a^2 , the lowest value of R occurs when $n = 1$; then

$$R = \frac{(\pi^2 + a^2)^3}{a^2}. \quad (193)$$

図 1

$W = D^2W = 0$ のとき、 $(D^2 - a^2)^2W = 0$ から $D^4W = 0$ となる。また (128) 式

$$(D^2 - a^2)^3W = -Ra^2W \quad (17)$$

より同様にして $D^6W = 0$ となる。両辺を z で 2 階さらに微分すると

$$D^2(D^2 - a^2)^3W = -Ra^2D^2W \quad (18)$$

となり、 $D^8W = 0$ も成り立つ。以下同様にして $D^{(2m)}W = 0$ が境界で成り立つ。これを満たす W を (128) 式に代入することでレイリー数の固有値 (192) 式が導かれる。 a は無次元化した波数であるから、ある a で計算される (193) 式の右辺が、別に計算されるレイリー数よりも大きいときは安定となる (12 節参照)。

$$\frac{\partial R}{\partial a^2} = 0 \quad (19)$$

となるときの波数で右辺が最も小さくなる (図 (2))。1 章で述べられているように、すべての波数で安定であることが安定条件であるから、この点が不安定かどうかを決める臨界点となることになる。この点からずれたところではレイリー数によって安定である波数と不安定である波数が共存しうするため全体として不安定になる。したがって (196) 式で与えられる $R_c \approx 657.5$ 以上のレイリー数で不安定になる。不安定が最初に起こる波長は (197) 式で与えられる。

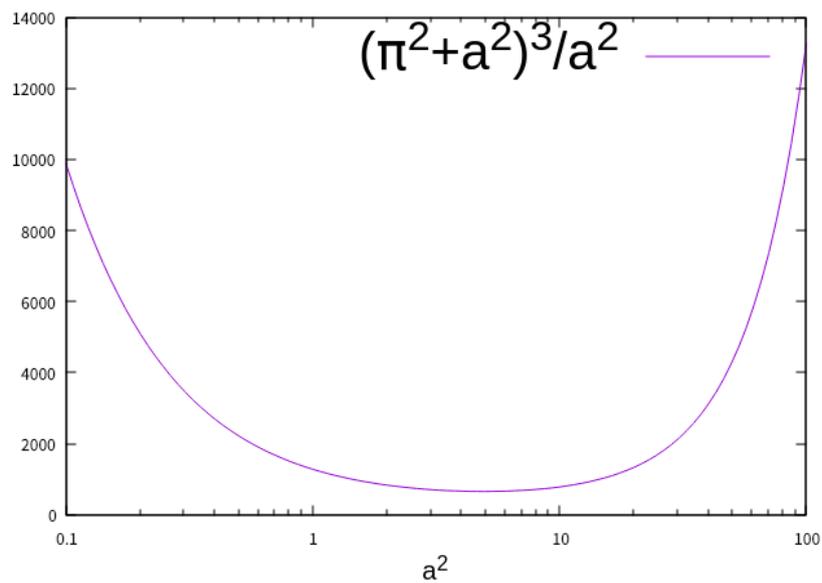


図 2 a^2 に対する $(\pi^2 + a^2)^3 / a^2$ のグラフ。レイリー数がこのグラフの下側にあれば安定、上側であれば不安定となる。

(b) *The solution for two rigid boundaries*

In view of the symmetry of this problem with respect to the two bounding planes, it will be convenient to translate the origin of z to be midway between the two planes. Then, the fluid will be confined between $z = \pm\frac{1}{2}$; and we have to seek solutions of the equation

$$(D^2 - a^2)^3 W = -Ra^2 W \quad (198)$$

which satisfy the boundary conditions

$$W = DW = (D^2 - a^2)^2 W = 0 \quad \text{for } z = \pm\frac{1}{2}. \quad (199)$$

We may first observe that it follows from the evenness of the operator $(D^2 - a^2)^3$, and the identity of the boundary conditions which have to be satisfied at $z = \pm\frac{1}{2}$, that the proper solutions of equation (198) fall into two non-combining groups of even and odd solutions. From general considerations, it is clear that the lowest 'state' will be even with no nodes while the first 'excited state' will be odd with a node at $z = 0$.

It is evident that the general solution of equation (198) can be expressed as a superposition of solutions of the form

$$W = e^{\pm qz}, \quad (200)$$

where q^2 is a root of the equation

$$(q^2 - a^2)^3 = -Ra^2. \quad (201)$$

Letting

$$Ra^2 = \tau^3 a^6, \quad (202)$$

we find that the roots of equation (201) are given by

$$q^2 = -a^2(\tau - 1) \quad \text{and} \quad q^2 = a^2[1 + \frac{1}{2}\tau(1 \pm i\sqrt{3})]; \quad (203)$$

次に固定境界の場合を考える。境界中心を原点に置く。(198) 式の解は 1 次元シュレディンガー方程式と同様に、偶関数解または奇関数解となる。 $z \rightarrow -z$ としても成り立つので $W(z)$, $W(-z)$ は同じ固有値を与える解となる。またこの固有値は縮退していないため (証明略)、

$$W(z) = cW(-z), \quad c = \text{const.} \quad (20)$$

として定数倍の関係になる。ここで

$$W(z) = cW(-z) = c^2W(z) \quad (21)$$

より $c = \pm 1$ 。したがって偶関数解または奇関数解のどちらかとなる。

(203) 式 →(204),(205) 式で

$$q_0^2 = -a^2(\tau - 1), \quad q^2 = a^2 \left[1 + \frac{1}{2}\tau(1 \pm i\sqrt{3}) \right] \quad (22)$$

$$q_0 = a(\tau - 1)^{1/2} \quad (23)$$

q は $q/a = \alpha + \beta i$ として両辺を 2 乗して連立方程式

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 1 + \frac{\tau}{2} \\ 2\alpha\beta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\tau \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 1 + \frac{\tau}{2} \\ 2\alpha\beta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\tau \end{cases} \quad (25)$$

を解くと

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \tau + \tau^2} \\ \beta^2 = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \tau + \tau^2} \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \tau + \tau^2} \\ \beta^2 = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \tau + \tau^2} \end{cases} \quad (27)$$

となり、(205) 式の $\text{Re}(q)$, $\text{Im}(q)$ の結果に一致する。

Subtracting the first row from the third row and dividing the result by $-\sqrt{3}/2$, we get

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -q_0 \tan \frac{1}{2}q_0 & q \tanh \frac{1}{2}q & q^* \tanh \frac{1}{2}q^* \\ 0 & \sqrt{3}-i & \sqrt{3}+i \end{vmatrix} = 0. \quad (213)$$

Expanding this last determinant, we have

$$\text{im}\{(\sqrt{3}+i)q \tanh \frac{1}{2}q\} + q_0 \tan \frac{1}{2}q_0 = 0. \quad (214)$$

(213) 式から (214) 式を導く。

$$\begin{aligned} & (\sqrt{3} + i)q \tanh \left(\frac{1}{2}q \right) - (\sqrt{3} - i)q_0 \tan \left(\frac{1}{2}q_0 \right) \\ & + (\sqrt{3} + i)q_0 \tan \left(\frac{1}{2}q_0 \right) - (\sqrt{3} - i)q^* \tanh \left(\frac{1}{2}q^* \right) = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & (\sqrt{3} + i)q \tanh \left(\frac{1}{2}q \right) - \left\{ (\sqrt{3} + i)q \tanh \left(\frac{1}{2}q \right) \right\}^* \\ & + 2iq_0 \tan \left(\frac{1}{2}q_0 \right) = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\Rightarrow \text{Im} \left\{ (\sqrt{3} + i)q \tanh \left(\frac{1}{2}q \right) \right\} + q_0 \tan \left(\frac{1}{2}q_0 \right) = 0 \quad (30)$$

(216) 式を数値的に解くことで a, τ の関係が得られる。ここから Fig.2 の R, a のグラフを書くことができ、自由境界のときと同様に最小になるところが臨界のレイリー数となる。このときの q_0, q, q^* を境界条件に代入することで W, F の式を求めることができる。奇関数も同様。

境界の一方が固定、もう一方が自由の場合を考える。両端固定の場合の式 (224)

$$W \approx \sin q_0 z - 0.017 \sinh q_1 z \cos q_2 z + 0.003 \cosh q_1 z \sin q_2 z \quad (31)$$

を見ると、 $z = 0$ で

$$W = D^2 W = (D^2 - a^2)^2 W = 0 \quad (32)$$

を満たす ((224) 式のもともとの条件は $z = \pm 1/2$ で $W = DW = (D^2 - a^2)^2 W = 0$)。したがってセルの厚みを $d \rightarrow d/2$ とすれば答えをそのまま今回の場合に適用できる。このとき $a = kd$ より両端固定の場合の a_c の $1/2$ 倍となるが、(223) 式を τ について解いたときの式を変えないために $\tau_c = \sqrt[3]{(R_c/a_c^4)}$ が両端固定のときと等しい必要がある。そこで R_c は 2^4 で割ればよい。したがって (226) 式が導かれる。

参考文献

- [1] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. International series of monographs on physics. Clarendon Press, 1961.