Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability[2]

C1SB2064　辻 勇吹樹

2024 年 10 月 7 日

2. 下から温められた流体の層の熱的不安定

I The BÉNARD PROBLEM

2-5. 導入

第 2 章では回転や磁場を考えず (3-5 章)、下から温められた流体の水平な層の熱的不安定を考える。回転や磁場は流体に相反する影響を与え、多くの驚くような流体の運動の性質が実験的に検証されている。

2-6. 物理問題の性質

底部を温めることで逆温度勾配 (adverse temperature gradient) が作られると、底が上部よりも軽くなるため不安定となりかき混ぜられようとする。Bénard らによる実験によれば

1. 逆温度勾配がある臨界点に達する。
2. 不安定が始まると流体は無数のセルに分かれる。

となった (18 節参照)。一方 Rayleigh は**レイリー数**

$$R = \frac{g\alpha\beta}{\kappa\nu} d^4 \tag{1}$$

が臨界値 R_c を超えたときに不安定になることを理論的に示した。この R_c を決めることが第 2 章のテーマとなる。

2-7. 流体の基礎方程式

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0 \tag{2}$$

運動量保存 (運動方程式)

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right\} \tag{3}$$

熱伝導 (エネルギー保存)

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(c_V T) + \rho u_j \frac{\partial}{\partial x_j}(c_V T) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k \frac{\partial T}{\partial x_j}\right) - p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \Phi \tag{4}$$

x_j を位置、u_j を速度とする。

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0 \tag{5}$$

体積積分を実行することで、ガウスの発散定理を用いると

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \, \mathrm{d}\tau = -\int_S \rho u_j \, \mathrm{d}S_j \tag{6}$$

$(\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_3)$ となり、ある体積内の流体の質量の変化率がその体積の表面を通って流れる流体の流出率で決まることを述べている。すなわち質量保存の式である。$\mathrm{d}S_j$ は表面の微小面積 $\mathrm{d}S$ に垂直で同じ大きさのベクトルである (テンソルの話は Appendix に記載した)。

連続の式を変形すると

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} = -\rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \tag{7}$$

となり、非圧縮流体 $(\rho = const.)$ では

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{8}$$

となり、磁場のように発散 0 であり、ベクトル $\mathbf{A}$ を用いて $\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A}$ と表すことができる。

運動方程式

弾性体力学において、変形を平行移動や回転から区別するには 2 点間の距離が用いられる。すなわち変位ベクトル $\mathbf{u}$ を用いて、ある点の微小変位 $\mathrm{d}\mathbf{r}'$ は距離の変わらない移動の微小変位を $\mathrm{d}\mathbf{r}$ として

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{r}' &= \mathrm{d}\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r} + \mathrm{d}\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}) && (9) \\ &= \mathrm{d}\mathbf{r} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j && (10) \end{aligned}$$

となる。したがって 2 点間の距離の変化 $\mathrm{d}l'$ はもともとの距離を $\mathrm{d}l$ として

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}l')^2 &= \left(\mathrm{d}x_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\right)\left(\mathrm{d}x_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k\right) && (11) \\ &\approx \mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\mathrm{d}x_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k\mathrm{d}x_i && (12) \\ &= (\mathrm{d}l)^2 + 2e_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j && (13) \\ e_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) && (14) \end{aligned}$$

となり、e_{ij} を**ひずみ** (strain) といい、変形の効果を表す。流体においてはこの時間微分をとったものを**ひずみ速度** e_{ij} として定義する。これを用いて**応力** (stress)P_{ij} は

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \varpi_{ij} + q_{ij;kl}e_{ij} && (15) \\ &= -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} + \lambda\delta_{ij}e_{kk} \quad (isotropic) && (16) \end{aligned}$$

と表される。等方的 (isotropic) な流体の場合応力の式は座標変換にはよらず、右辺のテンソル $\varpi_{ij}, q_{ij;kl}$ は等方テンソルでなければならない。したがって

$$\begin{aligned} \varpi_{ij} &= -p\delta_{ij} && (17) \\ q_{ij;kl} &= \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) && (18) \end{aligned}$$

と表される。(2 階、4 階の等方テンソルは上のような形しかない。i, j, k, l を入れ替えても成り立つようにすればよい。) これらの式を代入すると (16) 式が得られる。p はここまではただの x_i のスカラー関数だが、ひずみが無いときの等方圧力として定義すると P_{ii}、すなわち面の外側に働く力を正にとると、面に垂直な方向に働く応力 (の 3 方向の足し合

わせ) は $-3p$ となるはずである。(16) 式に代入すると $\lambda = -(2/3)\mu$ の関係が得られる。したがって

$$P_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(2e_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}e_{kk}\right) \tag{19}$$

と表される。ここで μ は**粘性係数**であり、垂直でない方向に働く応力の効果を表す。この項を p_{ij}[粘性応力] とし、ひずみ速度を陽に書くと

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \mu\left\{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right\} && (20) \\ &= \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad (incompressible) && (21) \end{aligned}$$

となる。

応力を導入し、および X_i を流体に働く外力の i 成分とすると運動方程式は

$$\begin{aligned} \rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \rho X_i + \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} && (22) \\ &= \rho X_i + \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\mu\left\{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right\} && (23) \\ &= \rho X_i + \frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu\nabla^2 u_i \quad (incompressible, \mu = const.) && (24) \end{aligned}$$

となる。最後の式は (23) 式の右側 2 項が落ちて **Navier-Stokes 方程式**の形となる。

また連続の式と同様に体積積分を行なう。ただし左辺の積分は連続の式を用いて

$$\begin{aligned} \int_V \left\{\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right\}\mathrm{d}\tau &= \int_V \left\{\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} - u_i\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j)\right\}\mathrm{d}\tau + \int_S \rho u_i u_j \mathrm{d}S_j && (25) \\ &= \int_V \left\{\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i\frac{\partial \rho}{\partial t}\right\}\mathrm{d}\tau + \int_S \rho u_i u_j \mathrm{d}S_j && (26) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho u_i \mathrm{d}\tau + \int_S \rho u_i u_j \mathrm{d}S_j && (27) \end{aligned}$$

となることを用いる。すると運動方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho u_i \mathrm{d}\tau = \int_V \rho X_i \mathrm{d}\tau + \int_S P_{ij}\mathrm{d}S_j - \int_S \rho u_i u_j \mathrm{d}S_j \tag{28}$$

と変形できる。これは運動量保存を表していて、

- 左辺: ある体積 V の中の流体の運動量変化 (オイラー微分なので体積は固定)
- 右辺第 1 項: V に働く外力

- 右辺第 2 項: 表面 S に働く応力による運動量流束
- 右辺第 3 項: S を通って流体が動くことによる運動量流束

となっている。

粘性拡散率

運動方程式から運動エネルギーの変化率を導出する。(22) 式両辺に u_i をかけて体積積分を行なう。

$$\frac{1}{2}\int_V \rho\frac{\partial}{\partial t}u_i^2\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\int_V \rho u_j\frac{\partial}{\partial x_j}u_i^2\mathrm{d}\tau = \int_V \rho u_i X_i\mathrm{d}\tau + \int_V u_i\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}\mathrm{d}\tau \tag{29}$$

ここで左辺について (1/2 は省略)

$$\int_V \rho\frac{\partial}{\partial t}u_i^2\mathrm{d}\tau + \int_V \rho u_j\frac{\partial}{\partial x_j}u_i^2\mathrm{d}\tau = \int_V \left(\rho\frac{\partial}{\partial t}u_i^2 - u_i^2\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j)\right)\mathrm{d}\tau + \int_S \rho u_i^2 u_j\mathrm{d}S_j \tag{30}$$

$$= \int_V \left(\rho\frac{\partial}{\partial t}u_i^2 + u_i^2\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)\mathrm{d}\tau + \int_S \rho u_i^2 u_j\mathrm{d}S \tag{31}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho u_i^2\mathrm{d}\tau + \int_S \rho u_i^2 u_j\mathrm{d}S \tag{32}$$

となること、および (7) 式などを用いて

$$P_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = P_{ij}e_{ij} \tag{33}$$

$$= \left(-p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \frac{2}{3}\mu\delta_{ij}e_{kk}\right)e_{ij} \tag{34}$$

$$= -pe_{jj} + 2\mu e_{ij}^2 - \frac{2}{3}\mu(e_{jj})^2 \tag{35}$$

$$= \frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \Phi \tag{36}$$

$$= 2\mu e_{ij}^2 \quad (incompressible) \tag{37}$$

$$\Phi = 2\mu e_{ij}^2 - \frac{2}{3}\mu(e_{jj})^2 \tag{38}$$

となることを用いる。すると

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho u_i^2\mathrm{d}\tau$$
$$= \int_V \rho u_i X_i\mathrm{d}\tau + \int_S u_i P_{ij}\mathrm{d}S_j - \frac{1}{2}\int_S \rho u_i^2 u_j\mathrm{d}S_j - \int_V \left(\frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \Phi\right)\mathrm{d}\tau \tag{39}$$

という式が導かれる。

- 左辺: ある体積 V の中の流体の運動エネルギー変化
- 右辺第 1 項: V に働く外力のする仕事
- 右辺第 2 項: 表面 S に働く応力のする仕事
- 右辺第 3 項: 流体が動くことによるエネルギー流束
- 右辺第 4 項 (1): 圧縮による、運動エネルギーから内部エネルギー ($p\mathrm{d}V$) への変化
- 右辺第 4 項 (2): 粘性によるエネルギー散逸率 ($\rightarrow$ 運動エネルギー)

となっている。

熱伝導方程式

(39) 式はエネルギー保存のような形をしているが、運動方程式と連続の式を変形しただけであるから独立の式ではない。変数は速度 (位置)3 成分に密度や圧力、粘性係数があるためこのままでは解くことができない。そこで新たに方程式を組み立てる。(ただし、結果として新たな変数が増えるだけになる。)
単位質量あたりのエネルギーは c_V を単位質量あたりの定積比熱とすると

$$\epsilon = \frac{1}{2}u_i^2 + c_V T \tag{40}$$

と表される。したがってエネルギーの収支を考えると

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\epsilon\mathrm{d}\tau \\ &\quad = \int_V \rho u_i X_i \mathrm{d}\tau + \int_S u_i P_{ij}\mathrm{d}S_j + \int_S k\frac{\partial T}{\partial x_j}\mathrm{d}S_j - \int_S \rho\epsilon u_j \mathrm{d}S_j\end{aligned} \tag{41}$$

- 右辺第 1 項: V に働く外力のする仕事
- 右辺第 2 項: 表面 S に働く応力のする仕事
- 右辺第 3 項: S を通って熱の形で伝えられるエネルギー (k: 熱伝導係数)
- 右辺第 4 項: 流体が動くことによるエネルギー流束

となる。また今までの式を用いて面積分を体積積分に直し、積分の中身で成り立つ式を導出する。

$$
\begin{aligned}
&\int_S u_i P_{ij} \mathrm{d}S_j \\
&\qquad = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho u_i^2 \mathrm{d}\tau - \int_V \rho u_i X_i \mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\int_S \rho u_i^2 u_j \mathrm{d}S_j + \int_V \left(\frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \Phi\right)\mathrm{d}\tau \quad (42) \\
&\int_S k\frac{\partial T}{\partial x_j}\mathrm{d}S_j = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}\tau \quad (43) \\
&-\int_S \rho\epsilon u_j \mathrm{d}S_j \\
&\qquad = -\int_S \rho\left(\frac{1}{2}u_i^2 + c_V T\right)u_j \mathrm{d}S_j \quad (44) \\
&\qquad = -\frac{1}{2}\int_S \rho u_i^2 u_j \mathrm{d}S_j - \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j c_V T)\mathrm{d}\tau \quad (45)
\end{aligned}
$$

面積分の項どうしは打ち消し合い、左辺の $u_i^2/2$ の項も (42) 式第 1 項で相殺される。したがって

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_V T) \\
&\qquad = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) + \frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \Phi - \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho c_V T u_j) \quad (46) \\
&\rho\frac{\partial}{\partial t}(c_V T) + \rho u_j \frac{\partial}{\partial x_j}(c_V T) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) + \frac{p}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \Phi \quad (47)
\end{aligned}
$$

とまとめられる。最後の式には連続の式を用いた。これがエネルギー保存の式である。しかし新たな変数 T が現れたため更にそれぞれの系における**状態方程式**が必要になる。ただし温度が $T = T_0$ のまわりでそれほど変化しない場合は 1 次で近似して

$$
\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)] \quad (48)
$$

$$
\alpha = -\left.\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial T}\right|_{T=T_0} \quad (49)
$$

体膨張率 α を用いて表し、これからの議論ではこの式を用いる。

Appendix. $\mathrm{d}S$ と $\mathrm{d}S_j$ の関係 [1]

xyz 平面に同じ点から出発するベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ と、それらで張られる平行四辺形 S を考える。この S を xy 平面上に写像したときの面積 S_{xy} は、$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ も xy 平面に写像したと

きのベクトル $\mathbf{A}_{xy}, \mathbf{B}_{xy}$ を用いて

$$S_{xy} = |\mathbf{A}_{xy} \times \mathbf{B}_{xy}| = \begin{vmatrix} A_x & B_x \\ A_y & B_y \end{vmatrix} \tag{50}$$

と表される。yz, zx 平面でも同様に考えることができて、次の反対称テンソルを定義できる。

$$(S_{\alpha\beta}) = \left(\begin{vmatrix} A_\alpha & B_\alpha \\ A_\beta & B_\beta \end{vmatrix} \right) \tag{51}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & S_{xy} & -S_{zx} \\ -S_{xy} & 0 & S_{yz} \\ S_{zx} & -S_{yz} & 0 \end{pmatrix} \tag{52}$$

ここで

$$S_\alpha = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_{\beta\gamma} \tag{53}$$

という (対偶) ベクトルを考えると、$S_x = S_{yz}$ となるので一般に $\mathbf{S} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ とできる。数学的に $(S_{\alpha\beta})$ と S_α は双対の関係 (対偶ベクトル) にあるといわれる。

参考文献

[1] ガウスの発散定理. `https://ieyasu03.web.fc2.com/PhysicsMath/7-Gauss.pdf`. (Accessed on 10/04/2024).

[2] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. International series of monographs on physics. Clarendon Press, 1961.