

# Introduction to Cosmology 2nd Edition

C1SB2064 辻 勇吹樹

2024年1月11日

## From 10.5 The Physics of Inflation[2]

この章では「宇宙論 I: 宇宙のはじまり [3]」、 「入門現代の宇宙論 [1]」を参考としている。

10.4 節および表 1 に示しているように、輻射優勢のときにインフレーションが起きたと

表 1 インフレーション理論による問題の解決

問題	内容	解決法
平坦性問題	現在よりも宇宙初期の方が平坦	宇宙項のようなエネルギーが優勢になることで、以前の曲率の平坦からのズレを小さくできる。
地平線問題	因果を持たない領域同士で温度がほぼ等方的	因果を持つ状態からの加速膨張
モノポール問題	大統一時代でのゼロ次元の位相的欠陥。 現在見つかっておらず、予測に比べて 10 桁以上小さい制限がかかっている。	加速膨張で薄められる。

することで平坦性問題、地平線問題、モノポール問題を解決することができた。それでは、このインフレーションを引き起こすものは何であろうか。以下にその引き起こすものが満たすべきいくつかの条件を述べる。

- $P < -\frac{1}{3}\rho$  を満たす。
- ある時刻  $t_i$  でインフレーションが始まり、その後時刻  $t_f$  で終わる (再加熱)。
- 曲率は平坦にするが、局所的な曲率 (ゆらぎ) は平坦にせず完全な等方性とはなら

ない。

ここではそれらを満たすものとして、スカラー場  $\phi$  (インフラトン場) を導入する。すなわちこの場の時間変化によってインフレーションが始まり、終わるメカニズムを考える。

## 1 インフラトン場

このスカラー場  $\phi$  がもつエネルギー密度や圧力を与えよう。10.4 節では大統一時代にインフレーションが始まったと仮定したが、これほど宇宙が小さく熱い場合は相対論的効果、量子的効果が重要になってくる。

エネルギー密度や圧力はエネルギー・運動量テンソルから与えられる。まずラグランジアン密度  $\mathcal{L}$  は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) \quad (1)$$

$$= \frac{1}{2c^2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (2)$$

与えられる。スカラー場の単位は  $[\text{kg}^{1/2}\text{m}^{1/2}\text{s}^{-1}]$  となる。Ryden の本では  $1/(2\hbar c^3)$  が係数となっているが、この場合単位はエネルギーとなる。参考にしてている本では前者の係数が用いられていたため前者をこれ以降で用いることとする。またここでは宇宙が一様等方として  $\phi$  が空間には依存しないものとする。このとき計量テンソル  $g^{\mu\nu}$  は平坦な場合の Robertson-Walker 計量から

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/a^2(t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

与えられる ( $g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu$ )。スカラー場  $\phi$  について、場  $\phi$  とポテンシャル  $V(\phi)$  の関係は、標高  $h$  というスカラー場と重力ポテンシャル  $\phi = mgh$  や、電場  $\mathbf{E}$  というベクトル場と電位  $V$  の関係 ( $\mathbf{E} = -\nabla V$ ) に例えることができる。このときエネルギー・運動量テ

ンソルは

$$T_{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (g = \det g_{\mu\nu}) \quad (4)$$

$$= \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \mathcal{L} g_{\mu\nu} \quad (5)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2 + V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 \left( \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2 - V \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \left( \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2 - V \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \left( \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2 - V \right) \end{pmatrix} \quad (6)$$

と定義される。また 4.1 節で与えたように完全流体では  $T_{\mu\nu} = (\rho + p/c^2)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$  とも表される。したがって

$$\epsilon_\phi = \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (7)$$

$$P_\phi = \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (8)$$

と求められる。

インフレーションを引き起こしているのはポテンシャル  $V(\phi)$  であるから、上の式からインフラトン場の変化がポテンシャルに比べて十分に小さい ( $\dot{\phi}^2 \ll \hbar c^3 V(\phi)$ ) ときにインフレーションが起こる。このとき圧力は負になり加速膨張をもたらしていることも分かる。一様等方での流体方程式に上のエネルギー密度と圧力を代入する。

$$\dot{\epsilon}_\phi + 3H(t)(\epsilon_\phi + P_\phi) = 0 \quad (9)$$

$$\ddot{\phi} + 3H(t)\dot{\phi} = -c^2 \frac{dV}{d\phi} \quad (10)$$

左辺第 2 項は減衰項 (Hubble 摩擦) であり、インフレーションによる場の値の時間変化を萎えさせる。右辺は外力である。この式は質点が空気抵抗を受けて落下するときの運動方程式

$$m\ddot{a} + \beta\dot{z} = mg = -\frac{d}{dz}(mgz) \quad (11)$$

( $\beta$ : 空気抵抗の比例係数) と同じ形である。徐々に速度が落ちていくと、やがて重力と空気抵抗がつりあい終端速度に至る。インフラトンでも同様にして

$$\dot{\phi} = -\frac{c^2}{3H} \frac{dV}{d\phi} \quad (12)$$

となると  $\phi$  はそれ以上加速することなくポテンシャルの坂を転がっていく。また Friedmann 方程式はインフレーションを引き起こすモノが優勢と考えれば

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \epsilon_\phi = \frac{8\pi G}{3c^2} \left( \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \quad (13)$$

と与えられる。同様にゆっくりとインフレーションが進行するとき (スローロール近似)

$$H = \left( \frac{8\pi G V}{3c^2} \right)^{1/2} \quad (14)$$

が成り立つ。以上の式をインフレーションが発生する条件に代入すると

$$\left( \frac{dV}{d\phi} \right)^2 \ll \frac{24\pi G V^2}{\hbar c^5} \quad (15)$$

$$\ll \frac{V^2}{E_P^2} \quad (16)$$

( $E_P = \sqrt{\hbar c^5/G} \approx 10^{19} \text{ GeV}$ : プランクエネルギー) となる。 $\ddot{\phi} = 0$  でポテンシャルが十分に緩やかという条件では  $\phi$  はほとんど変化せず、宇宙項のようにエネルギー密度も時間によらずほぼ一定になる。すなわち宇宙は加速膨張してインフレーションが実現される。この条件を満たすポテンシャルはいくつも存在し、例えば宇宙が始まってすぐに大きな量子ゆらぎをもっていたことから起こるカオティックインフレーションなどがある。次に紹介するのは場の勾配をうまく決めることで起こる小振幅場モデルである。

## 2 小振幅場モデル

例えば図 1 のようなポテンシャルが前節で述べたような近似

$$\left( \frac{dV}{d\phi} \right)^2 \ll \frac{V^2}{E_P^2} \quad (17)$$

が  $\phi \approx 0, V(\phi) \approx V_0$  で成り立つ。したがってこの「台地」の上に乗っている間はほとんどポテンシャルの大きさが変わらず、 $\epsilon_\phi \approx V_0$  で一定となっている。この「台地」の上にいるような状態は「準安定の偽の真空状態」と呼ばれる。名前の通り本当の安定ではないが、次の安定状態に移るまでには非常に長い時間を要する。インフレーションは輻射優勢のときに起こるので、 $\epsilon_r \sim \alpha T^4$  (光子のみ) が  $a^{-4}$  で落ちる中ほとんど変化しないインフラトン場  $V_0$  が  $\epsilon_r$  よりも大きくなったときにインフレーションが起きると考えることがで

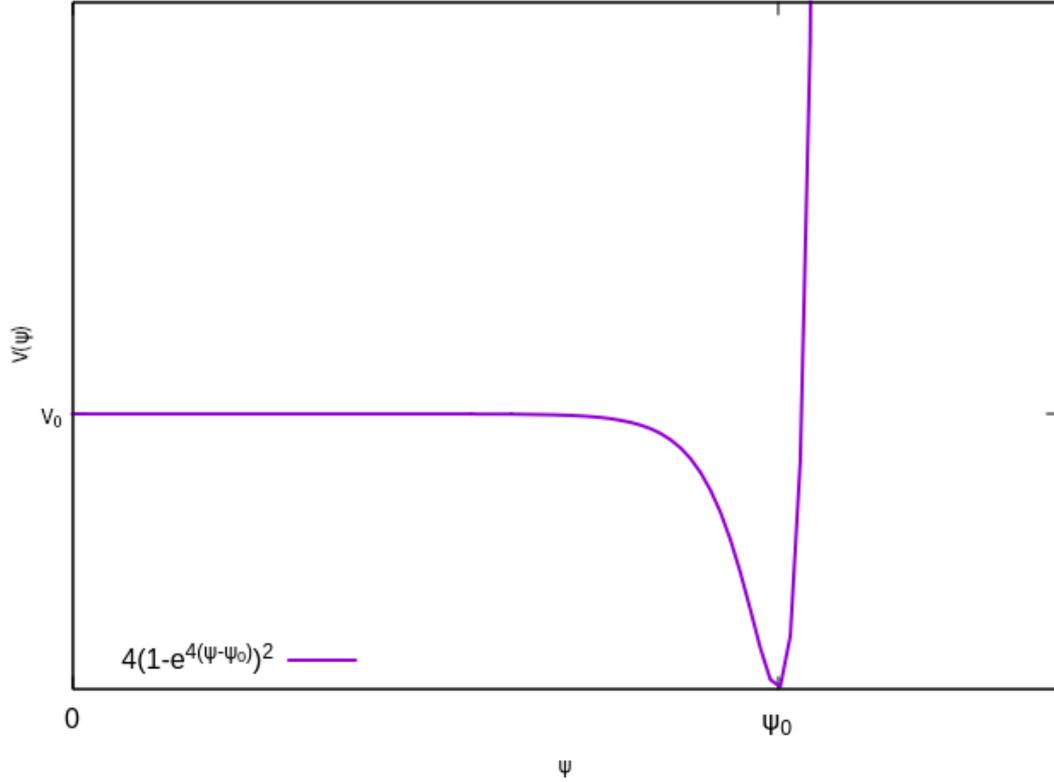


図1 slowroll 近似を実現するポテンシャルの一つの例。自発的対称性の破れで安定な真空に落ち着くモデル (ナチュラルインフレーション) におけるポテンシャルに近い形。

きる。対応する温度やエネルギー、ハッブルパラメータは

$$T_i \approx \left( \frac{V_0}{\alpha} \right)^{1/4} \approx 2,15 \times 10^{28} \text{K} \left( \frac{V_0}{10^{105} \text{TeV m}^{-3}} \right)^{1/4} \quad (18)$$

$$kT_i \approx 1.85 \times 10^{12} \text{TeV} \left( \frac{V_0}{10^{105} \text{TeV m}^{-3}} \right)^{1/4} \quad (19)$$

$$t_i \approx \left( \frac{c^2}{GV_0} \right)^{1/2} \approx 3 \times 10^{-36} \text{s} \left( \frac{V_0}{10^{105} \text{TeV m}^{-3}} \right)^{-1/2} \quad (20)$$

$$H_i \approx \left( \frac{8\pi GV_0}{3c^2} \right)^{1/2} \approx t_i^{-1} \quad (21)$$

( $10^{105} \text{TeV}$  は 10.4 節で与えた、大統一時代の全エネルギー密度。) と表される。時刻の計算では 5.3 節での 1 成分系でのエネルギー密度の計算

$$\epsilon(t) = \frac{1}{6\pi(1+w)^2} \frac{c^2}{G} t^{-2} \approx \frac{c^2}{G} t^{-2} \quad (22)$$

から近似している。図1でインフレーションは  $\phi = \phi_0$  で終了する。ゆっくりと下がっているところでは  $\phi$  は時間に対してほぼ線形で変化するものとする (式 (12) より  $\frac{dV}{d\phi}$  が定数とほぼ等価) とすれば 10.4 節であたえた e-foldings 数  $N$  は

$$N \equiv H_i(t_f - t_i) = H_i \frac{\phi_0}{\frac{\phi_0}{t_f - t_i}} \approx H_i \frac{\phi_0}{\dot{\phi}} \quad (23)$$

$$\approx \frac{3H_i^2}{\hbar c^3} \left( \frac{dV}{d\phi} \right)^{-1} = 8\pi \left( \frac{E_p}{V_0} \frac{dV}{d\phi} \right)^{-1} \left( \frac{\phi_0}{E_p} \right) \quad (24)$$

と近似できる。 $\phi_0$  や  $V_0$  が大きいほど、 $\frac{dV}{d\phi}$  が小さいほど、すなわちポテンシャルがほとんど転がり落ちない高い広い台地であるほど、より膨張したことになる。

インフレーション後の再加熱の仕組みについて考える。図1のポテンシャルで転がり落ちた後、 $\phi_0$  のまわりでエネルギーは振動することになる。インフラトン場のエネルギーは光子や相対論的粒子へと崩壊して輻射のエネルギーとなる。

真の真空へと変わることは真空の相転移であり、水が氷に相転移するときと同じように「潜熱」が放出される。これが再加熱の原理である。インフレーションを終えると始まる前に比べて  $T \propto a^{-1}$  より  $e^{-N}$  倍になる。平坦性を説明するのに必要な  $N = 65$  とすれば宇宙の温度は  $10^{28}\text{K}$  から  $0.6\text{K}$  まで小さくなる。モノポールやその他のすべての粒子の数密度は  $n \propto a^{-3}$  より  $e^{-3N}$  倍になるが、再加熱のプロセスによってインフラトン場からエネルギーを受け取ることができれば光子などの粒子の温度はインフレーション前後で保存される。再加熱のプロセスは複雑なので詳しくは書籍等で追ってほしい。

インフレーションの加速膨張は  $P < -\frac{1}{3}\epsilon$  となる負の圧力によって実現された。圧力は式 (8) で与えられ、インフレーションが進むにつれて第1項が大きくなる。すなわち

$$\frac{1}{2c^2} \dot{\phi}_f^2 - V(\phi_f) = -\frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2c^2} \dot{\phi}_f^2 + V(\phi_f) \right\} \quad (25)$$

$$\dot{\phi}_f^2 = \frac{1}{2} c^2 V(\phi_f) \quad (26)$$

となるところのスカラー場  $\phi_f$  でインフレーションは終了する。さらにスローロール近似を使って式 (12) と (14) を用いると

$$\frac{c^4}{12\pi G} \left( \frac{1}{V} \left( \frac{dV}{d\phi} \right)_{\phi=\phi_f} \right)^2 = 1 \quad (27)$$

と表せるので、ポテンシャルの形からインフレーションが終了する時刻を決めることができる。

補足的に述べると、インフレーションのモデルには非常に多くのものがある。図1以外にも図2のようなモデルも存在する。図1を与えるような場は擬南部・ゴールドストーン場であり、底の円の接線方向に存在した質量0の粒子が対称性を破って質量をもつ。その有力候補が暗黒物質の候補にも述べたアキシオンである。このモデルはスローロールの中でもナチュラルインフレーションと呼ばれる。他にも $\phi$ の初期値を決めなくて良いカオス的インフレーションや一般相対性理論に基づいたスタロビンスキーインフレーションなどが提唱されている。

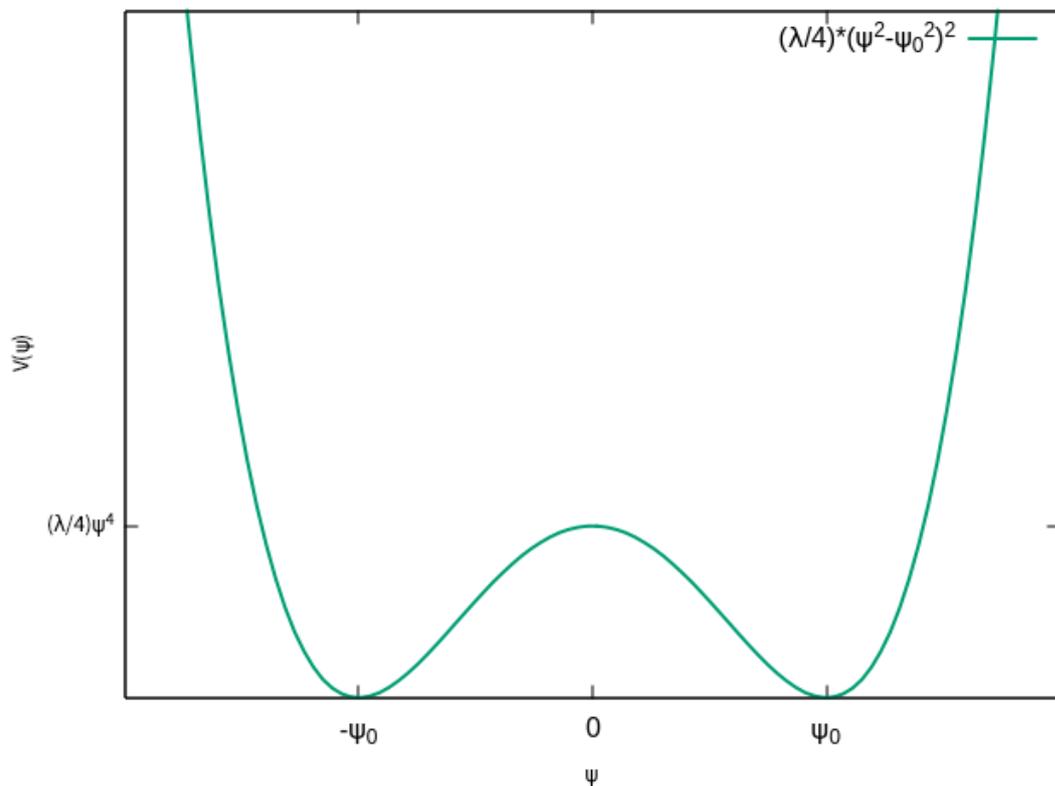


図2 slowroll 近似を実現するポテンシャルの一つの例。一般相対性理論のもとでのモデル(トポロジカルインフレーション)におけるポテンシャルに近い形。

### 3 エネルギーのゆらぎ

インフレーションによって宇宙を宇宙開闢時の妥当な曲率から現在の平坦性を説明することは104節よりできたが、エネルギー密度の局所的なゆらぎも平坦にしてしまうように考えられる。しかし、それでは宇宙背景放射の温度ゆらぎを説明できない。実際には真空

の量子ゆらぎがインフレーションによって拡大されたことで、完全な一様等方とはなっていない。ここまではインフラトン場を一様等方としてきたが、スカラーの摂動  $\delta\phi(\mathbf{x}, t)$  を加えて考えてみよう ( $\phi = \phi_0 + \delta\phi$ )。摂動を加えたことでポテンシャルも変化する。2次までを考えると

$$V(\phi) \approx V(\phi_0) + \frac{dV}{d\phi}\bigg|_{\phi=\phi_0} \delta\phi + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{d\phi^2}\bigg|_{\phi=\phi_0} \delta\phi^2 \quad (28)$$

摂動を与えているが、Robertson-Walker 計量で進める。このときラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \quad (29)$$

$$= \frac{1}{2c^2} \dot{\phi}_0^2 - V(\phi_0) + \dot{\phi}_0 \dot{\delta\phi} - \frac{dV}{d\phi}\bigg|_{\phi=\phi_0} \delta\phi + \frac{1}{2} \dot{\delta\phi}^2 - \frac{(\partial_i \delta\phi)^2}{2a^2} - \frac{1}{2} \frac{d^2V}{d\phi^2}\bigg|_{\phi=\phi_0} \delta\phi^2 \quad (30)$$

となる。エネルギー運動量テンソルは

$$T_{00} = \partial_0 \phi \partial_0 \phi + \mathcal{L} g_{00} \quad (31)$$

$$= \frac{1}{2c^2} \dot{\phi}_0^2 + V(\phi_0) + \dot{\phi}_0 \dot{\delta\phi} + \frac{dV}{d\phi}\bigg|_{\phi_0} \delta\phi + \frac{1}{2} \dot{\delta\phi}^2 - \frac{(\partial_i \delta\phi)^2}{2a^2} + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{d\phi^2}\bigg|_{\phi_0} \delta\phi^2 \quad (32)$$

$$T_{ii} = \partial_i \phi \partial_i \phi + \mathcal{L} g_{ii} \quad (i \neq 0) \quad (33)$$

$$= a^2 \left[ \frac{1}{2c^2} \dot{\phi}_0^2 - V(\phi_0) + \dot{\phi}_0 \dot{\delta\phi} - \frac{dV}{d\phi}\bigg|_{\phi=\phi_0} \delta\phi + \frac{1}{2} \dot{\delta\phi}^2 - \frac{(\partial_i \delta\phi)^2}{2a^2} - \frac{1}{2} \frac{d^2V}{d\phi^2}\bigg|_{\phi=\phi_0} \delta\phi^2 \right] + (\partial_i \delta\phi)^2 \quad (34)$$

と表され、それぞれエネルギー密度、圧力  $/a^2$  に対応する。ここでラグランジュ方程式を導入する。

$$\partial_i \left( \frac{\partial L}{\partial(\partial_i \psi)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0 \quad (35)$$

証明はしないが、 $L = L(x, \dot{x}, t)$  とすれば

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (36)$$

となって解析力学で見たラグランジュの運動方程式となる。インフラトン場に戻り、 $L = L(\delta\phi, \partial_i \delta\phi, t)$  として摂動に関するラグランジュ方程式を用いて式 (30) を代入すると ( $L = a^3 \mathcal{L}$ ) 非摂動部からは式 (10) と同じものが得られ、摂動部からは

$$\ddot{\delta\phi} + 3H\dot{\delta\phi} - \frac{\partial_i^2 \delta\phi}{a^2} + \frac{d^2V}{d\phi^2}\bigg|_{\phi_0} \delta\phi = 0 \quad (37)$$

が得られる。摂動を波長ごとに分解してフーリエ変換を行う。

$$\delta\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \delta\phi_k(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (38)$$

すると摂動部の式は

$$\delta\ddot{\phi}_k + 3H\delta\dot{\phi}_k - \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{d^2V}{d\phi^2}_{\phi_0} \right) \delta\phi_k = 0 \quad (39)$$

となる。図 1 の中で偽の真空状態の台地では  $\frac{d^2V}{d\phi^2}_{\phi_0}$  の項を無視できる。インフレーション初期のハッブル半径の十分内側では波長がハッブルパラメータに比べ小さいことからハッブル摩擦の項 ( $3H\delta\dot{\phi}_k$ ) を更に無視できる。一方インフレーションが進むと  $a$  が急激に増加するので  $\frac{k^2}{a^2}$  の項を無視できる。ここからの議論は、「入門現代の宇宙論 [1]」で示されているが、それぞれで量子力学の計算を進めてスカラー場のパワースペクトルを求めている。これらのインフレーションにおける量子ゆらぎは CMB でも「ザクス-ヴォルフ効果」として長波長のスケール不変なゆらぎとして観測することができる。

## 参考文献

- [1] 入門現代の宇宙論インフレーションから暗黒エネルギーまで.: KS 物理専門書. 講談社, 2022.
- [2] Barbara Ryden. *Introduction to Cosmology*. Cambridge University Press, 2 edition, 2016.
- [3] 二間瀬 敏史. 宇宙論 I(シリーズ現代の天文学第 2 巻). 日本評論社, 2007.