

# Introduction to Cosmology 2nd Edition

C1SB2064 辻 勇吹樹

2024年1月18日

## From 11.5 Hot versus Cold[7]

この節では2種類のダークマターとそれによる密度ゆらぎの違いについて説明する。  
[相対論的宇宙論](小玉英雄)[9], [Galaxy Formation](Longair)[6], [宇宙論 II][8]を参考にした。

### 1 2種類のダークマター

輻射優勢期におけるハッブル距離の空間にある”物質”の質量  $M_H$  を求めよう。ハッブル距離は  $c/H$  で定義される。ハッブルパラメータは平坦な場合

$$H = \left( \frac{8\pi G\epsilon}{3c^2} \right)^{1/2} = H_0 \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{c,0}} \right)^{1/2} = H_0 \sqrt{\Omega} \quad (1)$$

と表せ、輻射優勢期でエネルギーはスケール因子  $a$  の4乗で落ちることから

$$H = H_0 \frac{\sqrt{\Omega_{r,0}}}{a^2} \quad (2)$$

となる。したがって物質の質量密度がスケール因子  $a$  の3乗で落ちることに注意して

$$M_H = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{c}{H_0} \frac{a^2}{\Omega_{r,0}} \right)^3 \frac{\rho_{m,0}}{a^3} = 1.66 \times 10^{28} M_\odot a^3 \quad (3)$$

と求められる。ダークマターはしばしば輻射と物質の密度が同じ時刻(等密度時)  $a_{rm} = 2.9 \times 10^{-4}$  における熱速度によって分類される [2][1]。教科書では上で求めた質量が銀河系の質量オーダー  $M_{gal} \approx 10^{12} M_\odot$  となったときの熱速度で分類している。このときのスケール因子は  $a \approx 3.9 \times 10^{-6}$ (輻射優勢期)であり、熱速度は  $3kT \approx 180\text{eV}$  と求められる

る。

冷たい暗黒物質 (CDM) はこの時刻での熱速度が光速以下、すなわち非相対論的な物質であった粒子である。CDM にはアキシオンやニュートラリーノが候補にある。一方熱い暗黒物質 (HDM) は熱速度が光速以上、すなわち相対論的な物質であった粒子である。ただし現在も相対論的である必要はなく、HDM にはニュートリノも含まれている。前の章でニュートリノの背景放射を取り扱ったように過去ニュートリノは十分相対論的で”放射”であった。

## 2 密度ゆらぎへの効果

まず HDM の効果を考える。HDM が非相対論的な速度になるときの温度と時刻は次式で与えられる。

$$T_h \approx \frac{m_h c^2}{3k} \approx 1.16 \times 10^4 \text{K} \left( \frac{m_h c^2}{3\text{eV}} \right) \quad (4)$$

$$a_h \approx 2.27 \times 10^{-4} \left( \frac{m_h c^2}{3\text{eV}} \right)^{-1} \quad (5)$$

$$t_h \approx H^{-1} \approx \quad (6)$$

この時刻までの HDM は熱速度がほぼ光速であるため、大きな速度分散をもち、あらゆる密度ムラを打ち消してしまう (free streaming)。したがって

$$d_{min} \approx ct_h \approx 13\text{kpc} \left( \frac{m_h c^2}{3\text{eV}} \right)^{-2} \quad (7)$$

$$r_{min} \approx 55\text{Mpc} \left( \frac{m_h c^2}{3\text{eV}} \right)^{-1} \quad (8)$$

$$k_{max} = 2\pi/r_{min} \approx 0.1\text{Mpc}^{-1} \quad (9)$$

$$M_{min} \approx 2.7 \times 10^{16} M_\odot \left( \frac{m_h c^2}{3\text{eV}} \right)^{-3} \quad (10)$$

(下式は共動距離) 以下の長さのゆらぎは HDM からは観測されない。残ったゆらぎは 11.3 節で見たように物質優勢宇宙で  $|\delta| \ll 1$  の間はスケール因子  $a$  に比例して大きくなる。そしてゆらぎのあるところで重力崩壊が起きて星形成が行われるので、 $M \sim M_{min}$  より大きな領域 (超銀河団以上) でこの HDM によって作られたゆらぎによって星形成が行われることになる。その後分裂によって銀河団や銀河が作られるシナリオをトップダウンシナリオと呼ぶ。

トップダウンシナリオでは超銀河団が古く、銀河の年齢が比較的若い必要がある。しかし実際の観測ではその逆が見られているため、ダークマターの多くは冷たい (CDM) と考えられている。例えば 2021 年に  $z = 7.6, t = 1.31 \times 10^{10} \text{yr}$  ほど前のクエーサー (活動銀河核) が発見されている [4]。また輻射ゆらぎは HDM ゆらぎに比べて非常に小さいため宇宙マイクロ波背景放射に見られる大きなゆらぎが作られないことになる。

冷たいダークマターは等密度時 ( $a = a_{rm}$ ) まで Appendix に述べる Mészáros 効果によって、光子との相互作用はないがゆらぎはほとんど成長しない。しかし等密度時以降にはスケール因子  $a$  に比例してゆらぎが成長する。CDM は光子と相互作用しないため晴れ上がりの直後から重力崩壊が可能になる。ゆらぎが 11.3 節でハッブル距離よりも小さな固有波長では輻射優勢期に密度ゆらぎが  $\log$  オーダーでしか成長しないことを確認した。しかしハッブル距離よりも大きな固有波長ではゆらぎが進化できる。冷たいダークマターが輻射から脱結合するときのハッブル距離を求めよう。WIMPs が脱結合するときはおよそ  $a \approx 3 \times 10^{-10}$  に相当する。脱結合は 1 秒間の散乱回数  $\Gamma$  がハッブルパラメータと等しくなるとき、言い換えると平均自由行程がハッブル距離と等しくなるときである。WIMPs の脱結合のときはまだ輻射優勢であるから、 $t = 1/2H$  の関係がある。したがって脱結合時のゆらぎスケールは

$$d_{de} = \frac{c}{H} = 2ct_{de} \approx 1.8 \times 10^{-8} \text{pc} \quad (11)$$

$$r_{de} \approx 60 \text{pc} \quad (12)$$

$$k_{de} \approx 10^5 \text{Mpc}^{-1} \quad (13)$$

$$M_{de} \approx 0.05 M_{\odot} \quad (14)$$

となる。すなわち脱結合時に  $M_{de}$  以上の質量および  $k_{de}$  以下の波数のゆらぎが存在していることになる。一方等密度時のゆらぎスケールは  $t \approx 1/1.8H$  となる (5.5 節参照) ことから

$$d_{rm} = \frac{c}{H} \approx 1.8ct_{rm} \approx 27.6 \text{kpc} \quad (15)$$

$$r_{rm} \approx 90 \text{Mpc} \quad (16)$$

$$k_{rm} \approx 0.07 \text{Mpc}^{-1} \quad (17)$$

$$M_{rm} \approx 1.3 \times 10^{17} M_{\odot} \quad (18)$$

となり、 $M_{rm}$  以上の質量および  $k_{rm}$  以下の波数のゆらぎは波数がハッブル距離よりも小さなゆらぎになるので輻射優勢期から成長することができる。一方で  $k_{rm} < k < k_{de}$  の波数でのゆらぎは物理的な距離がハッブル距離よりも小さい間、すなわちハッブル距離よりも小さなゆらぎであるうちは成長することができる。ハッブル距離よりも長くなると成

長は止まり (Mészáros 効果)、物質優勢となってハッブル距離よりもまた短くなると成長を再開する。そして  $k_{de} < k$  におけるゆらぎは大きな波数でのゆらぎほど成長できない時間が長くなる。

まとめよう。まず WIMPs が脱結合すると光子とのつながりが切れて重力崩壊ができるようになる。ハッブル距離は  $t$  に比例して長くなる。相対論的な議論により、ゆらぎスケールがハッブル距離よりも大きいとき輻射優勢では  $\delta \propto a^2 \propto t$ 、物質優勢では  $\delta \propto a \propto t^{2/3}$  で脱結合までは成長を続ける。(断熱ゆらぎと等曲率ゆらぎの重ね合わせとなる。) したがって徐々にハッブル距離が追いついてきて輻射優勢期にハッブル距離よりもゆらぎが小さくなると Mészáros 効果でゆらぎはほとんど成長しない。ただし HDM のようにカットオフされるわけではないので緩やかな成長となる。物質優勢期になるとスケールによらず  $\delta \propto a \propto t^{2/3}$  となって成長する。波数で表現すると  $k_{de} < k$  のゆらぎは脱結合時のハッブル距離よりも小さくなり成長しない。 $k_{rm} < k < k_{de}$  のゆらぎは脱結合から等密度時までの時刻でハッブル距離よりも大きな時間があるため成長ができる。ただしハッブル距離を下回ると等密度時まで成長しない。 $k < k_{rm}$  のゆらぎは等密度時まで常にハッブル距離よりも長い波長をもつため最も成長することができ、初期の密度ゆらぎモデル  $P \propto k^n$  となる。

このような密度ゆらぎの発展は HDM とは反対のボトムアップシナリオを与える。すなわち小さなスケールである銀河から合体などを通して大きな銀河団、銀河群が形成されたというものである。必ずしも CDM だけの宇宙が正しいわけではなく、HDM も混ぜたモデルが構築されている。中間の温かいダークマター (WDM) も存在する。もし HDM がニュートリノだけだとすればこの配合割合から銀河形成の観測と整合するためのニュートリノ質量に制限をかけることができる。例えば図 1 は CMB の偏光観測による制限で、縦軸はニュートリノのフレーバーの数、横軸は合計質量である [5]。青線は Planck 衛星による CMB 観測データから求めたもの、赤線は Euclid 衛星の「成長率」と呼ばれるパラメータを導入したものである。

$\Lambda$ CDM モデルは正の宇宙定数  $\Lambda$  と CDM をダークエネルギーとして考えるモデルである。 $\Lambda$ CDM モデルでは手に入れる必要のあるパラメータ ( $\Omega_{tot}, w$  など) と独立なパラメータ ( $t_0, \Omega_\Lambda$  など) があり、それらを用いることで別のパラメータを計算することができる ( $H_0, \Omega_{bary,0}$  など)。extended model として固定しないパラメータを 1 つ増やすものもある [3]。ただ近年の N-body シミュレーションによっていくつかの課題が出ている。その一つが「ミッシングサテライト問題」である。モデルの数値計算では  $10^7 - 10^9 M_\odot$  の小質量のダークハロー (ダークマターが重力で集まったもの) が銀河内に多く存在しているが、観測では見つかっていないという問題である。ただし技術の向上によって最近続々

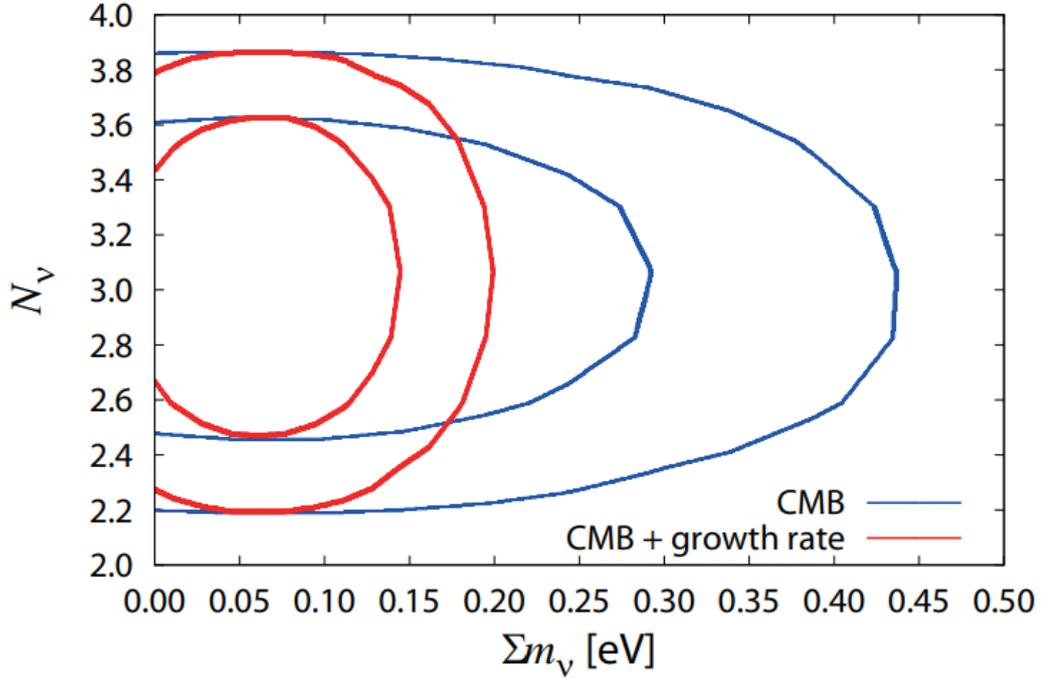


Fig. 2. Probability contours in the  $(\Sigma m_\nu, N_\nu)$ -plane. The contours show the  $1\sigma$  (68%) and  $2\sigma$  (95%) confidence limits, for the observational data of the CMB with the B-mode polarization (blue line) and CMB including B-mode plus the growth rate (red line).

図1 CMB の (B モードの) 偏光観測によるニュートリノ質量の制限。[5]

と伴銀河が見つかっていて、ただ暗くて見つけにくかったという解決法が進んでいる。

## Appendix: Mészáros 効果

輻射優勢期に冷たい暗黒物質によるゆらぎが変化しなくなる効果を Mészáros 効果、あるいはスタグspanションと呼ぶ。これを確認しよう。まず前提として 11.3 節ではゆらぎの方程式

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = 4\pi G\bar{\rho}\delta \quad (19)$$

を与えた。また輻射と物質だけを考えた時の Friedmann 方程式は

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} \quad (20)$$

で与えられる。これをゆらぎの方程式に代入する。ただし  $y = \Omega_{m,0}/\Omega_{r,0} = a/a_{rm}$  とすると

$$\frac{d^2\delta}{dy^2} + \frac{2+3y}{2y(1+y)} \frac{d\delta}{dy} - \frac{3\delta}{2y(1+y)} = 0 \quad (21)$$

となる。ゆらぎが増加するとき 2 階微分の項は落ちるので (厳密解は下式に  $1/2$  乗に比例する項と  $\log$  の項が入る)、

$$\delta \propto 1 + \frac{3y}{2} \quad (22)$$

のようにゆらぎが変化する。輻射優勢の初期ではこの解では正確ではない (11.3 節参照) が、同様にほとんどゆらぎが変化しない。一方で物質優勢となる  $y \gg 1$  では  $\delta \propto a$  となる。

## 参考文献

- [1] Cdm モデル — 天文学辞典. <https://astro-dic.jp/cold-dark-matter-model-2/>. (Accessed on 01/13/2024).
- [2] Lambda-cdm model - wikipedia. [https://en.wikipedia.org/wiki/Lambda-CDM\\_model](https://en.wikipedia.org/wiki/Lambda-CDM_model). (Accessed on 01/13/2024).
- [3] Lambda-cdm model - wikipedia. [https://en.wikipedia.org/wiki/Lambda-CDM\\_model](https://en.wikipedia.org/wiki/Lambda-CDM_model). (Accessed on 01/19/2024).
- [4] 観測史上最も遠いクエーサーを発見 - アストロアーツ. [https://www.astroarts.co.jp/article/h1/a/11807\\_j0313#:~:text=%E3%80%902021%E5%B9%B4%E6%9C%8818,%E5%84%84%E5%85%89%E5%B9%B4%E3%81%A8%E3%81%AA%E3%82%8B%E3%80%82](https://www.astroarts.co.jp/article/h1/a/11807_j0313#:~:text=%E3%80%902021%E5%B9%B4%E6%9C%8818,%E5%84%84%E5%85%89%E5%B9%B4%E3%81%A8%E3%81%AA%E3%82%8B%E3%80%82). (Accessed on 01/17/2024).
- [5] Koichi Hirano. Neutrino masses from cmb b-mode polarization and cosmic growth rate. *International Journal of Modern Physics A*, 30(01):1550001, 2015.
- [6] M.S. Longair. *Galaxy Formation*. Astronomy and Astrophysics Library. Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [7] Barbara Ryden. *Introduction to Cosmology*. Cambridge University Press, 2 edition, 2016.
- [8] 敏史 二間瀬, 了 池内, and 柁司 千葉. 宇宙論 II. Number 3 in シリーズ現代の天文学. 日本評論社, 第 2 版 edition, 2019.

- [9] 英雄 小玉. 相对論的宇宙論. パリティ物理学コース / 牧二郎 [ほか] 編. 丸善出版, 新装復刊 edition, 2015.