Introduction to Cosmology 2nd Edition

C1SB2064　　辻 勇吹樹

2023 年 10 月 26 日

From 4.1 Einstein's Field Equation[1]

曲率の違いを観測する

3.4 節で見たように、三角形の角度の和は曲率によって変化する。定曲率 κ, 三角形の面積 A を使って

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{\kappa A}{R_0^2} \tag{1}$$

と表せる。正の曲率のとき $\kappa = +1$、負の曲率のとき $\kappa = -1$、平坦な面では $\kappa = 0$ となる。また線素 dl は

$$dl^2 = dr^2 + S_\kappa(r)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi) \tag{2}$$

$$S_\kappa(r) = \begin{cases} R_0 \sin(r/R_0) \qquad (\kappa = +1) \\ r \qquad (\kappa = 0) \\ R_0 \sinh(r/R_0) \qquad (\kappa = -1) \end{cases} \tag{3}$$

で表される。ノートに三角形を描いてその角度が 180 度よりも大きいことを認識したことがないように、この宇宙の曲率が 0 からどれだけずれているかを計測することは非常に難しい。2 次元球面ではあるが地球を球だと近似したとき $(\kappa = +1)$ どれくらい角度が大きくなるか考えてみよう。大地に辺の長さが 1m の正三角形を描いたとする。地球の半径は約 6.4×10^6m であるから式 1 を使うと三角形の角度の和はおおよそ $\pi + 10^{-14}$[rad] となる。角度のズレを秒角に直すと 10^{-9} 秒角に相当し、2019 年に観測されたブラックホールのリングの大きさは約 4×10^{-6} 秒角であることからそれよりも 3 桁も小さいことになる。頑張っても地球サイズの三角形しか描けない状態では、宇宙規模の曲率に対してこの曲率を求めることがほぼ不可能だということが推測されるだろう。

自分の手で描くことは諦めて遠くの銀河を眺めてみよう。銀河直径を D、銀河までの距離を r とする。式 2 の両辺を積分すると、銀河を観測する角度 α は

$$\alpha = \frac{D}{S_\kappa(r)} \tag{4}$$

と求められる ($dr = d\phi = 0$)。これはこの宇宙が平坦でないとき距離に応じて実際の長さよりも大きく、または小さく見える場合があることを述べている。特に、正の曲率では $r = \pi R_0$ で発散し、空全体を覆うようになってしまう。負の曲率では exponential で縮んで見えるようになり、遠い星はさらにずっと小さく見えることになる。これらは観測事実に反していて少なくとも見える範囲でそのような膨張収縮は観測されていない。したがって曲率半径はハッブル距離 c/H_0 よりも長いものだろうと推測される。これは私達が普通に暮らしている限り地球が丸いことをほとんど認識できないこととほぼ同じと言えよう。地球が丸いことは地球を離れた星の動きから検証された。宇宙の外側を見ることができない限り宇宙の構造を調べることはできないのだろうか。

Einstein 方程式

上の疑問は 4.2 節で考えられるものとして、ここでは Einstein が一般相対性理論で曲率とエネルギー密度、圧力を結びつけるのに導き出した Einstein 方程式を見ることにしよう。
3.1 節で見たようなニュートン力学での重力ポテンシャルの Poisson 方程式

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho \tag{5}$$

に相当するものが Einstein 方程式である (Λ が 4.5 節で話題になる宇宙項に相当する)。

$$G_{\mu\nu} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} + \Lambda g_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{6}$$

(G : アインシュタインテンソル,R_{ab}: リーマンテンソルのリッチテンソル,R: スカラー曲率,g_{ab}: 計量テンソル)
Poisson 方程式によって質量密度 ρ から重力ポテンシャル Φ を計算し、それから物体の軌道を計算することができる。同様に Einstein 方程式ではエネルギー密度 ϵ、圧力 P、そのほか宇宙にある物質の特性から時空の曲率を計算することができる。Maxwell の方程式を 4 元テンソルにしたものは $\partial_a F^{ab} = 4\pi J^b$ と書かれるが少し似ているだろうか。
Einstein 方程式の両辺のテンソルは対称性を持つので 4×4 行列で考えると対角成分とそれ以外の一方の成分だけが意味を持つ、すなわち 10 個の方程式となる。特に 2 次の非

線形微分方程式である。$T_{\mu\nu}=0$ のとき局所的に真空と扱うことはできるが、2 次の微分方程式なのでその解は $Ax+B(A,B$ は定数$)$ のように他の点で必ずしも真空にはならない。また波動方程式 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=v^2\nabla^2 u$ のように時間と空間の 2 次の微分方程式では平面波解 $\exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)\}$ などの「波」の解が得られ、四重極が重力波を作り出す。

エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$

Einstein 方程式左辺の時空の曲率を記述する項にはまだ理解が及ばないので右辺の理解を少しでも進めていく。

一様で等方な宇宙 (宇宙原理) を仮定した理想気体ではこのテンソルはエネルギー密度と圧力だけに依ることになる。逆に言うとこれら 2 つの量は後節で述べられるような別の方程式で決める必要がある。

電磁場と完全流体のエネルギー運動量テンソルを考え、この $T_{\mu\nu}$ がどのような特徴を持っているかを考えてみよう。先に導きたい結論を述べると、このテンソルの成分を明らかにし、一様等方では対角成分しか持たないことを示す。ここでは富岡 (2014)[2] を参考にする。エネルギー運動量テンソルは流体の場合「x^ν 一定の面を横切る 4 元運動量 p^μ の流れ」として表される。

電磁場

電磁場でのエネルギー運動量テンソル $T_E^{\mu\nu}$ は次のように表される。

$$T_E^{\mu\nu}=\frac{1}{4\pi}\left(g_{\sigma\omega}f^{\mu\sigma}f^{\nu\omega}-\frac{1}{4}g^{\mu\nu}f_{\sigma\omega}f^{\sigma\omega}\right) \tag{7}$$

$$f^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & E_x & E_y & E_z\\ -E_x & 0 & B_z & -B_y\\ -E_y & -B_z & 0 & B_x\\ -E_z & B_y & -B_x & 0\end{pmatrix}\qquad \text{(cgs)} \tag{8}$$

(g: 計量テンソル (特殊相対論の範囲では Minkowski 計量 η))　特殊相対論の範囲でこのテンソルの成分を計算してみよう。すると

$$T_E^{00}=\frac{1}{4\pi}\left(g_{\sigma\omega}f^{0\sigma}f^{0\omega}-\frac{1}{4}g^{00}f_{\sigma\omega}f^{\sigma\omega}\right)=\frac{1}{8\pi}(E^2+B^2) \tag{9}$$

$$T_E^{0i}(i\neq 0)=T_E^{i0}(i\neq 0)=\frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix}E_yB_z-E_zB_y\\ E_zB_x-E_xB_z\\ E_xB_y-E_yB_x\end{pmatrix}=\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B} \tag{10}$$

$$T_E^{ij}(i,j\neq 0)=-\frac{1}{4\pi}\left\{E^iE^j+B^iB^j-\frac{\delta_{ij}}{2}(E^2+B^2)\right\} \tag{11}$$

となり、それぞれ電磁場におけるエネルギー密度、ポインティングベクトル、運動量、マクスウェルの応力テンソル (対角成分は圧力) に相当するものが現れる。そして電磁場におけるエネルギー運動量テンソルも対称であることが確かめられる。非対角成分に電磁波の流れに相当するポインティングベクトルや運動量が入っていることに注意する。電磁場も Einstein 方程式の右辺に入ることができて、時空を歪ませるのは重力だけではない。

完全流体

「x^ν 一定の面を横切る 4 元運動量 p^μ の流れ」という表現から

$$T^{ij} = p^i u^j \tag{12}$$

$$p = \left(mc, mv^1, mv^2, mv^3\right) \quad \text{4 元運動量} \tag{13}$$

$$u = \left(nc, nv^1, nv^2, nv^3\right) \quad \text{流れ} \tag{14}$$

と表される。T^{00} にはエネルギー密度、T^{i0} には運動量の空間成分、T^{0i} には i 成分のエネルギー流束、T^{ij} には j 成分の運動量流束が入ることになり、$i = j$ では圧力、$i \neq j$ ではせん断応力となる。これらの定義からエネルギーや運動量の保存則 (変化分=フラックス)

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \tag{15}$$

を導くこともできる。

完全流体の場合、粘性がないのでエネルギーの輸送が行われず、フラックスの成分が 0 となる。したがって

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p/c^2) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} \tag{16}$$

と対角成分のみで表される。一様等方の仮定を反映している Robertson-Walker 計量では、導出はしないが完全流体のエネルギー運動量テンソルと同じ式で表せることが導かれる。一様等方ではフラックスの存在が等方性に反することになるのでこれまで見てきた非対角成分の流束が落ちることが分かるはずだ。

以上よりエネルギー運動量テンソルについていくつかのことが分かった。その成分にエネルギー密度、エネルギー流束、運動量、運動量流束を含んでいて、発散を取ることで保存則を導くことができる。一様等方ではフラックスの成分が落ちて対角成分だけが残り、エネルギー密度と圧力のみで書くことができる。

Einstein 方程式の右辺の構造が分かったところで、次節以降では一般相対性理論を解くのに必要な変数やその式を考えていく。

参考文献

[1] Barbara Ryden. *Introduction to Cosmology*. Cambridge University Press, 2 edition, 2016.

[2] 竜太 富岡. **あきらめない一般相対論**. プレアデス出版, 2014.