Introduction to Cosmology 2nd Edition

C1SB2064　　辻 勇吹樹

2023 年 11 月 2 日

From 5.1 Evolution of Energy Density[3]

宇宙が一様で等方であることを仮定し、エネルギー密度 ϵ、圧力 P、スケール因子 a を結びつける 3 つの方程式を導いてきた。

- Friedmann 方程式

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2} \tag{1}$$

  Robertson-Walker 計量での Einstein 方程式の 00 成分。第 4 章では古典物理のエネルギー保存則から一般相対性理論に発展させた。

- 流体方程式

$$\dot{\epsilon} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\epsilon + P) = 0 \tag{2}$$

  Einstein 方程式の 11 成分 (と 00 成分を組み合わせたもの)。第 4 章では熱力学第 1 法則の時間微分から導いた。

- 状態方程式

$$P = w\epsilon \tag{3}$$

  第 4 章ではガスが希薄として単純化した。輻射 (相対論粒子) は $w = 1/3$、非相対論粒子では $w \sim 0$、宇宙定数では $w = -1$ となる。

エネルギー密度の関係式

ここからはこれらの方程式を組み合わせて物質や光子、背景放射のエネルギー密度を比較する。

2 式は宇宙に存在する異なる成分それぞれが満たしていなければならない。それはエネルギー密度や圧力はそれぞれの成分の和で記述されるためである。ただしそれぞれの成分で相互作用しない仮定をおいていて、それは厳密には正しくはない。この仮定のもとで 2 式に 3 式を代入して整理するとそれぞれの成分ごとに

$$\frac{d\epsilon_i}{\epsilon_i} = -3(1+w_i)\frac{da}{a} \tag{4}$$

$$\epsilon_i(a) = \epsilon_{i,0}a^{-3(1+w_i)} \tag{5}$$

と求めることができる。ただし w_i が一定として積分した。この式から物質や輻射のエネルギー密度 ϵ_m, ϵ_r はそれぞれ

$$\epsilon_m(a) = \epsilon_{m,0}/a^3 \tag{6}$$

$$\epsilon_r(a) = \epsilon_{r,0}/a^4 \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

と表せる。厳密な導出ではないが次のように考えることもできる。宇宙が膨張してもそれぞれの粒子のエネルギー ($E = mc^2$) は変化しないはずである。空間の粒子数密度 n はスケール因子の 3 乗で減少するので物質のエネルギー密度 ($\epsilon = nE$) は-3 乗で落ちていく。一方光子のエネルギーは $E = hc/\lambda$ で表され波長が宇宙の膨張とともに引き伸ばされるので $E \propto a^{-1}$ となる。数密度の減衰を含めて-4 乗で落ちていく。
上で求めた式を第 4 章で Friedmann 方程式と流体方程式から求め、宇宙定数を加えた加速度方程式に代入すると

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(1+3w)\epsilon + \frac{\Lambda}{3} \tag{9}$$

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\left(\frac{\epsilon_{m,0}}{a^2} + 2\frac{\epsilon_{r,0}}{a^3}\right) + \frac{\Lambda}{3}a \tag{10}$$

と求められる。スケール因子が非常に小さいときは輻射によるエネルギーが優勢となる。その後物質が優勢となるがここまでは式より減速させる効果の方が強くなっていた。しかしスケール因子が大きくなるにつれて宇宙定数の項が強くなり加速膨張が実行されることになる。

密度パラメータ

ここからは「入門現代の宇宙論」[1] を参考にする。ここでは第 4 章で導入した臨界密度 ϵ_c を用いる。

$$\epsilon_c = \frac{3c^2}{8\pi G}H^2 \tag{11}$$

これは平坦な宇宙における Friedmann 方程式を変形したものである。対象とするエネルギー密度と臨界密度との比を密度パラメータ Ω という。第 2 章で宇宙背景放射のエネルギー密度 $\epsilon_{CMB,0}$ は 0.2606MeVm^{-3} と計算された。この値を使うと密度パラメータは 5.35×10^{-5} と計算される。これは星の光のエネルギー密度よりも大きな値であり、宇宙に存在する光子のエネルギー密度を考える場合背景放射だけを考えれば良いことになる。星の光のエネルギー密度は末尾の Appendix で計算している。
また背景放射にはニュートリノも含まれる。これは宇宙の晴れ上がりよりも前、もっと宇宙が暑かったときではニュートリノでさえも自由に動けない環境であったと考えられるためである。ニュートリノ背景のエネルギー密度も Appendix で計算しているが、光子とニュートリノの背景放射のエネルギー密度には

$$\epsilon_{C\nu B} = \frac{7}{8}\left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{4}{3}}\epsilon_{CMB} = 0.227\epsilon_{CMB} \tag{12}$$

という関係が確かめられる。ニュートリノは 3 種類あるので合計で光子の 40% ほどのエネルギー密度と求められる (ニュートリノ振動の効果を含めると理論的には 3.046 倍になる)。また光子 1 個あたりのエネルギーは (Appendix より)5.28×10^{-4}eV と求められる。ただし先ほども述べたように輻射のエネルギーは宇宙膨張のスケール因子に反比例しているのでこのエネルギー値から減少していくことになることに注意する。1 粒子のエネルギーがこの程度以上あればニュートリノは輻射となるが、静止エネルギー $m_\nu c^2$ ほどになれば物質として考えなければならない。ニュートリノの質量 m_ν は陽子の質量の 100 億分の 1 以下ということだけが分かっているのでニュートリノの静止エネルギーは 1eV よりもずっと小さいことが分かる。もし現在でもニュートリノが全て相対論的粒子として考えられるのであれば、輻射の密度パラメータ Ω_r は

$$\Omega_r = \Omega_{CMB,a=0} + \Omega_{\nu,a=0} = 9.00 \times 10^{-5} \tag{13}$$

と求められる。

2018 年 Planck 衛星が宇宙背景放射を観測してその温度のゆらぎを解析して密度パラ

メータ (や曲率など) を計測した。解析手法には触れられないが、結果として物質と宇宙定数、曲率の密度パラメータは一つの手法 (TT,TE,EE+lowE+lensing+BAO,68%limits) で [2]

$$\Omega_m \sim 0.3111 \pm 0.0056, \quad \Omega_\Lambda \sim 0.6889 \pm 0.0056, \quad \Omega_K \sim 0.0005 \pm 0.004 \tag{14}$$

となっている。また臨界密度を求めるために必要なハッブル定数は $67.66 \pm 0.42 [\mathrm{kms^{-1}Mpc^{-1}}]$ となっている。ここで Friedmann 方程式を変形させると

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}(\epsilon_m + \epsilon_r + \epsilon_\Lambda) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2} \tag{15}$$

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1 \qquad when \quad \Omega_K = \frac{-Kc^2}{a^2 H} \tag{16}$$

で表せる。前の加速度方程式とは宇宙項の取り扱いを変えて密度パラメータに内包している。上の値を見れば物質と宇宙項 (暗黒物質) の寄与がほとんどであることが分かる。

優勢期

Planck 衛星のデータからほぼ平坦であることは分かったのでここでさらに思い切って $\Omega_k = 0$ のモデルを考えよう。
現在の Planck 衛星の観測データを比較すればそれぞれのエネルギー密度の割合は表 1 のようになる。現在のように宇宙項が最も大きな割合を締めている時期を**宇宙項優勢期**と呼ぶ。しかし最初に見たように物質と輻射のエネルギー密度は宇宙膨張によって減衰していくので、それぞれが等しくなる時刻が存在する。宇宙項と物質では

表 1　エネルギー密度の比較

宇宙項 (暗黒物質)	69%
物質	31%
輻射	0.009%

$$\frac{\epsilon_\Lambda(a)}{\epsilon_m(a)} = \frac{\epsilon_{\Lambda,0}}{\epsilon_{m,0}/a^3} = \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}} a^3 \tag{17}$$

$$a_{m\Lambda} = \left(\frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}}\right)^{-1/3} \sim 0.767 \tag{18}$$

$$z_{m\Lambda} = \frac{1}{a} - 1 \sim 0.30 \tag{19}$$

(z: 赤方偏移) の時点でエネルギー密度が同じになる。この時刻よりも前では**物質優勢期**となる。物質と輻射では

$$a_{rm} = \frac{\epsilon_{m,0}}{\epsilon_{r,0}} \sim \frac{1}{3400} \sim 2.9 \times 10^{-4} \tag{20}$$

$$z_{rm} = 3400 \tag{21}$$

これは宇宙初期になるがこの時期では**輻射優勢期**となる。この時期でのニュートリノ 1 粒子あたりのエネルギーは 1.8eV ほどになるので静止エネルギーよりも大きく、ニュートリノは輻射の 1 種であったことになる。このようにスケール因子や赤方偏移は時刻の代わりに用いられていることが多い。それぞれの時期での方程式の変化は次節以降で見ていくことになるが、ハッブル定数の変化がそれぞれの優勢期でどうなるかを見ておこう。ここでは平坦 ($\kappa = 0$) を仮定しているので Friedmann 方程式、加速度方程式は

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\epsilon \tag{22}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a}(= \dot{H} - H^2) = -\frac{4\pi G}{3c^2}(1 + 3w)\epsilon \tag{23}$$

となる。これらを組み合わせると

$$w = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H} \tag{24}$$

が得られる。宇宙初期の輻射優勢期では $w \sim 1/3$ なので $\dot{H}/H^2 = -2$、続く物質優勢期では $w \sim 0$ なので $\dot{H}/H^2 = -3/2$ となり、いずれもハッブル定数が時間とともに減少する。一方宇宙項優勢期では $w = -1$ から $\dot{H} = 0$ で後で見るようにハッブル定数がそれまでのペースを保って同じ割合で減少する。このとき宇宙は加速膨張する。
このように物質や輻射、宇宙定数など複数の項を同時に考えずそれぞれの優勢期を考え 1 要素を取り出すことで宇宙の膨張についてより分かりやすく考えることができるようになる。

Appendix: 星の光のエネルギー密度

星が多く集まっている銀河の光度を計算し、エネルギー密度を求める。Schechter は観測した銀河光度分布の近似関数を提案している [4]。

$$\phi(L)dL = \phi^* \left(\frac{L}{L^*}\right)^\alpha \exp\left(-\frac{L}{L^*}\right) d\left(\frac{L}{L^*}\right) \tag{25}$$

ϕ は銀河の数密度であり、L は光度、ϕ^*, L^*, α は観測から得られる特徴的なパラメータである。L^* は銀河の光度-数密度グラフで急激に変化しているところの光度、α はその急激な変化が起きる前のグラフの勾配に相当する。
この関数に光度をかけて積分したものが単位体積あたりの光度、すなわち光度密度 Ψ に相当することになる。

$$\begin{aligned}\Psi &= \int_0^\infty \phi(L) L d\left(\frac{L}{L^*}\right) && (26)\\ &= \phi^* L^* \int_0^\infty \left(\frac{L}{L^*}\right)^{\alpha+1} \exp\left(-\frac{L}{L^*}\right) d\left(\frac{L}{L^*}\right) && (27)\\ &= \phi^* L^* \Gamma(\alpha+2) && (28)\end{aligned}$$

論文ではおおよそ $\phi^* \sim 0.005\mathrm{Mpc}^{-3}, L^* \sim 3.14 \times 10^{10} L_{sun}, \alpha \sim -5/4$ の値でフィットしていた。これらの値を用いると、銀河の光度密度は

$$\Psi \sim 1.9 \times 10^8 L_{sun} \mathrm{Mpc}^{-3} \tag{29}$$

と求められる。これに時間をかければ銀河の星の光によるエネルギー密度 $\epsilon_{starlight}$ を計算できる。非常に長く見積もってハッブル時間 $t_0 \sim 4.5 \times 10^{17}\mathrm{s}$ としても

$$\epsilon_{starlight} \sim 0.007\mathrm{MeV\ m}^{-3} \tag{30}$$

となって背景放射の $0.2606\mathrm{MeVm}^{-3}$ に比べて 3% 以下の非常に小さなものだということが分かる。ただし実際には星の光だけでなくダストによる吸収と再放射も全波長域で考慮する必要があり、比は 0.1 ほどに落ち着くようである。ただし背景放射は過去ほど温度が高いのでエネルギーは大きく、この比はより小さかったものと推測される。

Appendix: ニュートリノのエネルギー密度

「宇宙マイクロ波背景放射」[5] を参考にする。
ニュートリノはフェルミ粒子の一つであり、フェルミ・ディラック分布に従う。反ニュートリノの粒子も含めると (それぞれ取りうるスピン状態は 1 つ)

$$f(E) = \frac{2}{\exp\left(\frac{E}{k_B T}\right) + 1} \tag{31}$$

ここで化学ポテンシャルは考えていない。光子はスピン状態を 2 つ持つが、ニュートリノと反ニュートリノはそれぞれ左巻き、右巻きの状態しか持たない。ただしニュートリノは

3 つの量子状態があることに注意する。高温であった宇宙ではニュートリノも相対論的粒子 ($E \sim pc$) として扱えるので、運動量空間でエネルギーをかけて積分すればエネルギー密度を求められる。

$$\epsilon_\nu(T) = \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} \frac{2pc}{\exp\left(\frac{pc}{k_B T}\right)+1} \tag{32}$$

$$= 8\pi \frac{(k_B T)^4}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x+1} dx \tag{33}$$

$$= \frac{7\pi^2}{120} \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} \tag{34}$$

光子はボーズ粒子の一つなのでボーズ・アインシュタイン分布で同様に計算すると、

$$\epsilon_\nu = \frac{7}{8}\epsilon_\gamma \tag{35}$$

であることが分かる。

またニュートリノ背景の温度は光子とは異なる。ここでは概略のみ述べる。先ほどの分布関数を P や T で偏微分したものと、熱力学第 1 法則を組み合わせるとエントロピー密度 s について

$$s = \frac{\epsilon + P}{T} \tag{36}$$

が得られる。種類が 6 つで内部自由度が 1 のニュートリノ (反ニュートリノ) と、内部自由度が 2 の光子・電子 (陽電子)、それぞれのフェルミ・ボーズも考慮したエントロピーを計算する。そして電子の対消滅直前と直後のエントロピー保存から

$$T_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{1}{3}} T_\gamma \tag{37}$$

が導かれる。先ほど求めたエネルギー密度は温度の 4 乗に比例していたので、光子とニュートリノの背景放射のエネルギー密度には

$$\epsilon_{C\nu B} = \frac{7}{8}\left(\frac{4}{11}\right)^{\frac{4}{3}} \epsilon_{CMB} = 0.227\epsilon_{CMB} \tag{38}$$

という関係があることが導かれる。2016 年にこれと 10% の精度で合致する観測データも得られている。

ニュートリノの数密度 n_ν も求めておこう。これは運動量空間で分布関数をただ積分すれば良い。ゼータ関数 ζ を用いる。

$$n_\nu(T) = \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{h^3} \frac{2}{\exp\left(\frac{pc}{k_B T}\right) + 1} \tag{39}$$

$$= 8\pi \left(\frac{k_B T}{hc}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x + 1} dx \tag{40}$$

$$= \frac{3\zeta(3)}{2\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3 \tag{41}$$

先ほどのエネルギー密度を使えば 1 粒子のエネルギーを求められて

$$E = \epsilon_\nu / n_\nu = \frac{7\pi^4}{180\zeta(3)} k_B T \tag{42}$$

となる。背景放射では $T_\nu \sim 1.945\mathrm{K}$ となるので $E \sim 5.28 \times 10^{-4}\mathrm{eV}$ と求められる。

参考文献

[1] **入門現代の宇宙論インフレーションから暗黒エネルギーまで**:. KS 物理専門書. 講談社, 2022.

[2] Nabila Aghanim, Yashar Akrami, Mark Ashdown, J Aumont, C Baccigalupi, M Ballardini, AJ Banday, RB Barreiro, N Bartolo, S Basak, et al. Planck 2018 results-vi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 641:A6, 2020.

[3] Barbara Ryden. *Introduction to Cosmology*. Cambridge University Press, 2 edition, 2016.

[4] Paul Schechter. An analytic expression for the luminosity function for galaxies. *Astrophysical Journal, Vol. 203, p. 297-306*, 203:297–306, 1976.

[5] 英一郎 小松. **宇宙マイクロ波背景放射**. Number 6 in 新天文学ライブラリー = New astronomy library. 日本評論社, 2019.