Introduction to Cosmology 2nd Edition

C1SB2064　　辻 勇吹樹

2023 年 11 月 16 日

From 5.5 Benchmark Model[1]

本節での数値計算は c の 4 段 4 次 Runge-Kutta 法で全て計算している。

モデルから導き出されるもの

ここでは Ryden の”Benchmark Model”を使って時間や光について考察していこう。モデルの特徴は以下のようになっている。

- 平坦 ($\kappa = 0$) とする
- 輻射、物質、宇宙項のみの宇宙を考える
- 現在のハッブル定数 H_0 は 68kms^{-1}Mpc^{-1} とする
- 観測によって導かれた密度パラメータを現在の値とする。

表 1 に観測値をまとめているがこれらは背景放射の温度ムラやビッグバン元素合成理論などから得られたものである。このとき Friedmann 方程式

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{1-\Omega_0}{a^2} \tag{1}$$

$$H_0 t = \int_0^a \frac{da}{[\Omega_{r,0}/a^2 + \Omega_{m,0}/a + \Omega_{\Lambda,0}a^2 + (1-\Omega_0)]^{1/2}} \tag{2}$$

を使って数値的に解くことができる。実際に図 1 では表 1 の値を用いて数値計算を行った。ただし $t = 0$ では右辺が発散してしまうので、初期値は輻射優勢であることから $a_1(t) = \sqrt{2H_0 t}$ で計算している。また対数グラフで表示できるように初期で計算を細かくして徐々に間隔を大きくしている。ただし現在での $(H_0 t_0, a(t_0))$ は厳密に (1,1) を通

表 1　密度パラメータ

輻射	$\Omega_{r,0} = 9.0 \times 10^{-5}$
光子	$\Omega_{\gamma,0} = 5.35 \times 10^{-5}$
ニュートリノ	$\Omega_{\nu,0} = 3.65 \times 10^{-5}$
物質	$\Omega_{m,0} = 0.31$
バリオン物質	$\Omega_{bary,0} = 0.048$
非バリオン物質	$\Omega_{dm,0} = 0.262$
宇宙項	$\Omega_{\Lambda,0} = 0.69$

るように規格化している。グラフで点線で示しているように最初は輻射優勢で $\propto t^{1/2}$、次に物質優勢で $\propto t^{2/3}$、最後に宇宙項優勢で指数関数で増大していくことになる。

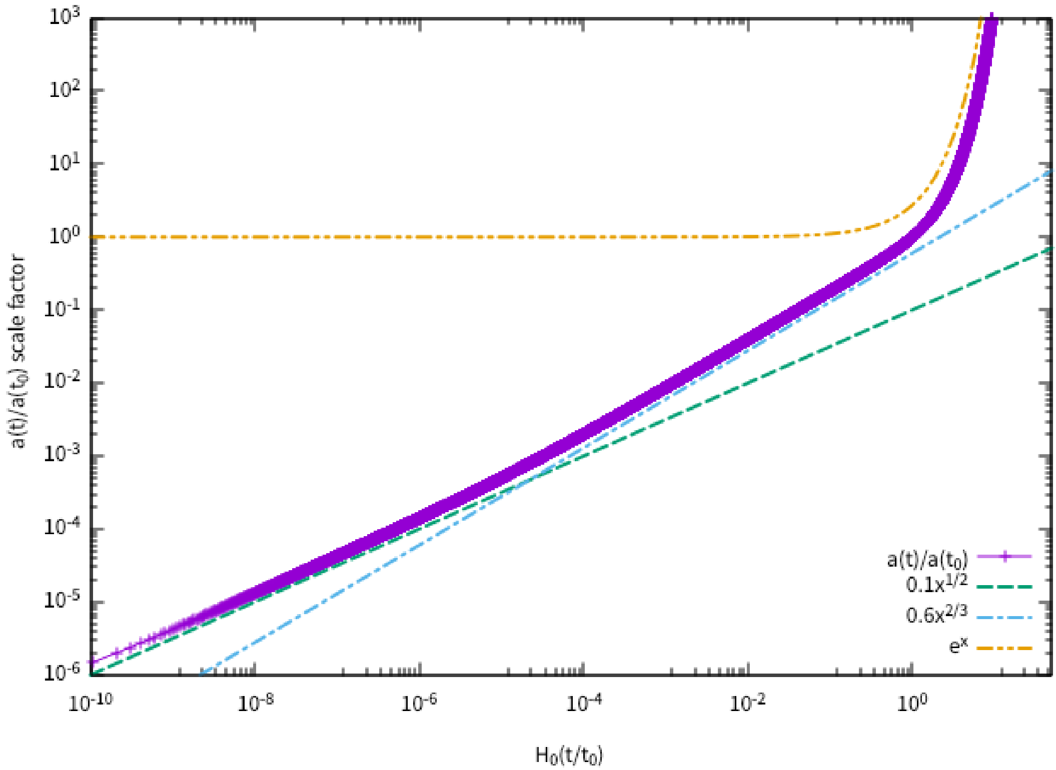

図 1　Benchmark Model で計算したときのスケール因子の時間発展の様子。それぞれの軸は現在の時刻で規格化している。

固有距離

次に、先ほど得られた $a = a(t)$ の関数から固有距離 (proper distance) を計算しよう。固有距離 $d_p(t)$ は 3.6 節,5.2 節で与えられたように $ds = 0$ から

$$d_p(t) = c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \tag{3}$$

(t_e: 光が放射された時刻,t_0: 観測された時刻)
で与えられる (同時刻での距離)。スケール因子の基準を現在 ($a(t_0) = 1$) とする場合と光が放射された時刻を基準 ($a(t_e) = 1$) とする場合の 2 つが考えられる。赤方偏移 z を使うと現在基準では $a(t_e) = 1/(1+z)$ と書けるので

$$d_p(t_0) = c\int_{t_e}^{t_0} (1 + z(t))dt \tag{4}$$

一方、放射時刻を基準にすると同じ式を使えば先ほどの $d_p(t_0)$ から $a(t_e)$ だけ距離が短くなっているはずなので

$$d_p(t_e) = \frac{c}{1 + z(t_e)}\int_{t_e}^{t_0} (1 + z(t))dt = \frac{d_p(t_0)}{1 + z(t_e)} \tag{5}$$

と表せる。これらから図 1 で求めたスケール因子を使って数値計算したものが図 2 となる。現在時刻を基準としたものは $z \to \infty$ で $d_p(t_0) \to 3.20c/H_0 \sim 1.4 \times 10^4\mathrm{Mpc}$ に収束する。これが 5.3 節で見た粒子的地平線 d_{hor} に相当する。すなわち現在時刻でこれ以上の距離にある空間とは光の因果関係が結ばれていないことになる。図 1 にあるように宇宙項優勢によって加速膨張が進むと現在の時刻基準で昔のスケール因子が非常に小さくなる。固有距離の定義からこの先現在基準の固有距離は広がっていくものと考えられる。一方放射時刻を基準とすると最大値 $d_p(t_{e,max} = 0.405c/H_0)$ が存在し、その後固有距離が短くなっていることが分かる。膨張が進んだことで現在では遠いとしても、放射時刻ではずっと近いということが起きうるためである。「ある星の距離はいくらか」という質問には固有距離がふさわしい回答になる。
ここで Benchmark Model では現在粒子的地平線の中にどれだけの物質が含まれているかを推定してみよう (Excercise5.10)。地球から等方に d_{hor} だけ広がっているものとすると、この宇宙の体積はおおよそ $\frac{4\pi}{3}d_{hor}^3$ となる。これに物質のエネルギー密度を質量密度

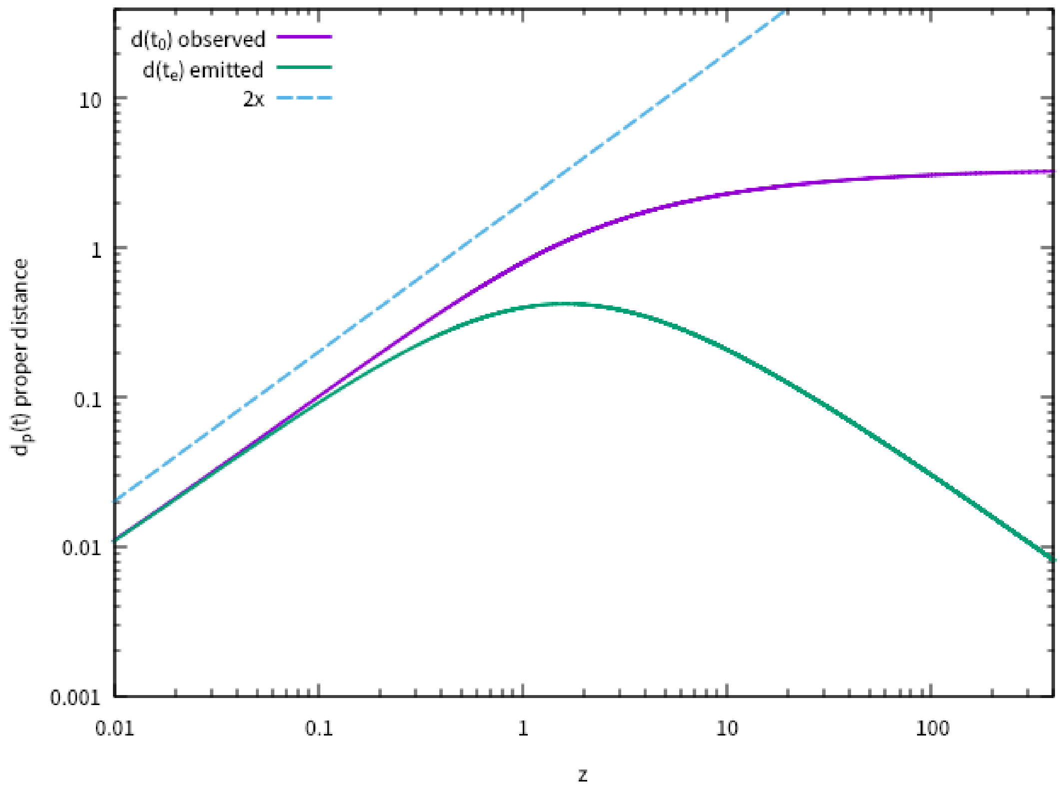

図 2　Benchmark Model で計算したときの固有距離 $d_p(t)$ の変化。現在時刻基準が $d_p(t_0)$, 各時刻 t を基準にしたものが $d_p(t_e)$ となる。

に変換したものをかけることで粒子的地平線内の質量を求めることができる。

$$M_{hor} = \frac{4\pi}{3} d_{hor}^3 \frac{\Omega_{m,0}\epsilon_{c,0}}{c^2} \tag{6}$$
$$= 4.56 \times 10^{23} M_{sun} \tag{7}$$

天の川銀河の質量はおおよそ $10^{12} M_{sun}$ であることを考えると、銀河に対する星がおおよそ宇宙に対する銀河に近いことが分かる。

lookback time

「ある星からの光がどれだけの距離を進むか」という質問には固有距離は答えていない。それはどの時刻を基準とするかによって距離が変わってしまい、今後も変わっていってしまうためである。この回答に相当するものが「lookback time($t_0 - t_e$)」である。図 3 が赤方偏移に対するその値である。参考までに物質の lookback time も載せている。図 1

では $(H_0 t_0, a(t_0)) = (1, 1)$ で規格化しているため、H_0^{-1} が時刻の単位となっている。図 3 のように単位を Gyr に直すためには以下の手続きが必要になる。

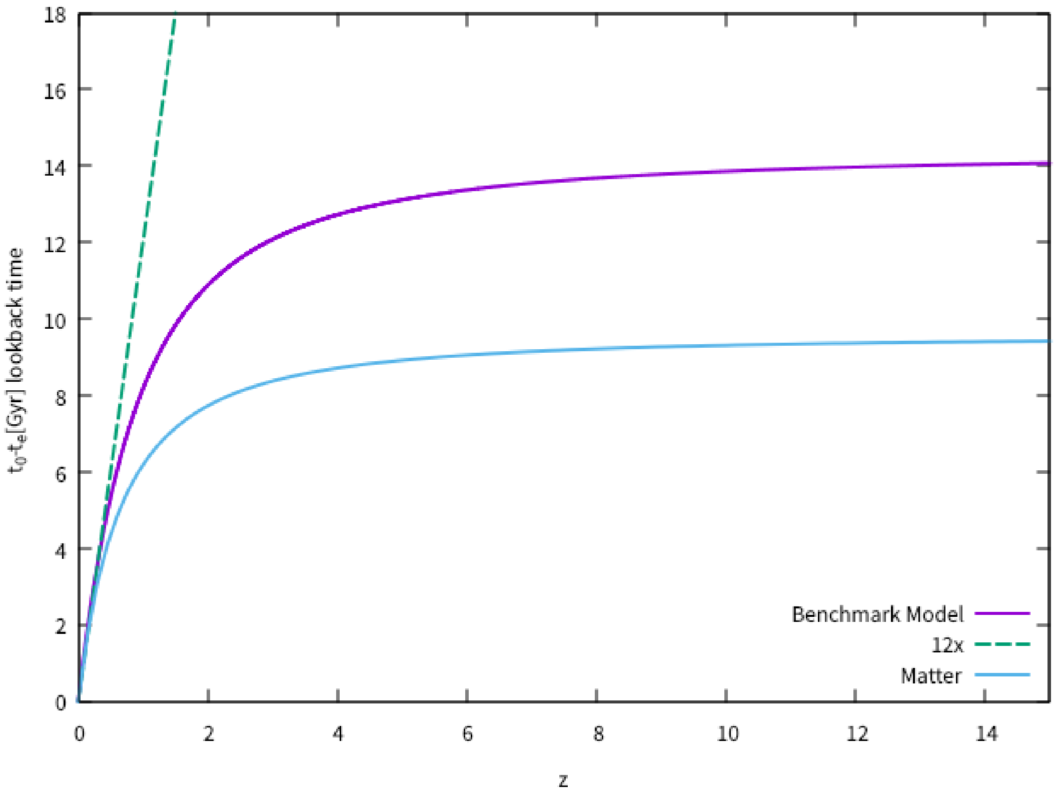

図 3　Benchmark Model と物質における lookback time。

$$
\begin{aligned}
H_0^{-1} &= 0.0147[\mathrm{km}^{-1}\mathrm{sMpc}] &(8)\\
&= 0.0147 \times (3.08 \times 10^{19})[\mathrm{s}] &(9)\\
&= 0.0147 \times (3.08 \times 10^{19})/(3600 * 24 * 365 * 10^9)[\mathrm{Gyr}] &(10)\\
&= 14.36[\mathrm{Gyr}] &(11)
\end{aligned}
$$

図 3 を見ると $z(t) \sim 4, a(t) \sim 1/5$ ほどで lookback time がほとんど変化しなくなっていることが分かる。t_0 は変わらないので、$z > 4$ よりも遠くで観測された天体は放射された時刻の間隔が 1Gyr 以下でほとんど変わらないことが確かめられる。これは宇宙がこれまで輻射や物質によって減速膨張をしていたため光の進む距離は遠くほど短くなる効果が入るためである。Benchmark Model によれば、すぐ遠くの天体を見ればすぐに宇宙初期の状態をみることができるのである。この点で望遠鏡はタイムマシーンだといわれることも納得できるだろう。

また宇宙項のみ、物質のみを考えた場合の lookback time はそれぞれ変化する。宇宙項のみを考えた場合、加速膨張を続けるので遠くの天体ほど光はずっと長い時間を進む必要がある。したがって z の増大に伴って lookbacktime は急激に増大していく。例えば $z = 2$ において lookback time は宇宙項のみでは 15.8Gyr,Benchmark Model では 10.5Gyr, 物質のみでは 7.7Gyr と計算される (いずれも上の変換式で時間を計算している)。
最後にこの節での結果を表 2 にまとめた。参考までに物質のみの場合も載せている。

表 2　Benchmark Model と物質のみの場合における諸量

	物質のみ	Benchmark Model
t_0 宇宙年齢	$\frac{2}{3}H_0^{-1}$	$0.955H_0^{-1}$(現在の宇宙年齢)
$d_{hor}(t_0)$ 粒子的地平線	2c/H_0	0.405c/H_0
a(t) スケール因子	$(t/t_0)^{2/3}$	図 1
$d_p(t_0)$ 観測基準の固有距離	$\frac{2c}{H_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)$	図 2
$d_p(t_e)$ 放射基準の固有距離	$\frac{2c}{H_0(1+z)}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right)$	図 2
$t_e - t_0$lookback time	$\frac{2}{3H_0}(1 - (1 + z)^{-3/2})$	図 3

参考文献

[1] Barbara Ryden. *Introduction to Cosmology.* Cambridge University Press, 2 edition, 2016.