Introduction to Cosmology 2nd Edition

C1SB2064　辻 勇吹樹

2023 年 12 月 14 日

From 8.5 What Causes the Fluctuations?[1]

この章では「宇宙マイクロ波背景放射」(小松英一郎)[2] を参考にしている。

1　ザクス・ヴォルフェ効果

まず、重力による CMB の温度異方性について述べる。最終散乱時刻 ($z \approx 1090$) では非バリオン物質が優勢となっている。このときのエネルギー密度は $\Omega_{dm,0} = 0.262, \Omega_{bary,0} = 0.048, \Omega_{\gamma,0} = 5.35 \times 10^{-5}, \epsilon_{c,0} = 4870\mathrm{MeV\ m^{-3}}$ を用いて

$$\epsilon_{dm}(z_{ls}) = \Omega_{dm,0}\epsilon_{c,0}(1+z_{ls})^3 \approx 1.7 \times 10^{12}\mathrm{Mpc\ m^{-3}} \tag{1}$$

$$\epsilon_{bary}(z_{ls}) = \Omega_{bary,0}\epsilon_{c,0}(1+z_{ls})^3 \approx 3.1 \times 10^{11}\mathrm{Mpc\ m^{-3}} \tag{2}$$

$$\epsilon_{\gamma}(z_{ls}) = \Omega_{\gamma,0}\epsilon_{c,0}(1+z_{ls})^4 \approx 3.9 \times 10^{11}\mathrm{Mpc\ m^{-3}} \tag{3}$$

と求めることができる。

もし非バリオン物質のエネルギー密度に異方性 ($\epsilon(\mathbf{r}) = \bar{\epsilon} + \delta\epsilon(\mathbf{r})$) があるとするとポアソン方程式

$$\nabla^2\Phi = \frac{4\pi G}{c^2}\delta\epsilon \tag{4}$$

から重力ポテンシャルにもゆらぎが生じることを示している。

次に、一般相対性理論における温度ゆらぎと重力ポテンシャルのゆらぎの関係について述べる。1967 年、ザクスとヴォルフェは次の式で任意の方向の温度異方性を記述した。

$$\begin{aligned}\frac{\Delta T(\mathbf{n})}{T_0} &= \frac{\delta T(t_{ls}, \mathbf{n}r_{ls})}{T_0(1+z_{ls})} + \Phi(t_{ls}, \mathbf{n}r_{ls}) - \Phi(t_0, 0) \\ &\quad + \int_{t_{ls}}^{t_0} dt(\dot{\Phi} + \dot{\Psi})(t, \mathbf{n}r) - \frac{1}{2}\sum_{ij}\int_{t_{ls}}^{t_0} dt\dot{D}_{ij}(t, \mathbf{n}r)\mathbf{n}^i\mathbf{n}^j\end{aligned} \tag{5}$$

(T_0: 現在時刻の温度, r: 共動距離, Φ: 重力ポテンシャル, Ψ: 空間曲率のゆらぎ, D: 重力波) 導出はしないが、基本となるいくつかの関係を述べておく。

- 測地線方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\lambda}{\mathrm{d}u^2} + \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}u} \tag{6}$$

  これは一般相対性理論における光子が従う運動方程式である。第 1 項が古典力学での加速度であるが、第 2 項で時空の歪みの効果を表す。$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ はクリストッフェル記号であり、Einstein 方程式のように省略記号となっている。

- 光子の 4 元運動量ベクトル

$$p^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}u} \tag{7}$$

  光子は世界間隔 $ds = 0$ の性質から

$$\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = 0 \tag{8}$$

  を満たす。この 4 元運動量ベクトルを用いて測地線方程式を書き直すと

$$\frac{\mathrm{d}p^\lambda}{\mathrm{d}t} + \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{p^\mu p^\nu}{p^0} \tag{9}$$

  となる。

次に、温度異方性の式の物理的意味を与えよう。右辺第 1 項は最終散乱時刻における温度ゆらぎである。このときそれらを構成する光子が「重力ポテンシャルの底」にいるとすると、これらの光子はポテンシャルとして極小値をとっている。晴れ上がり後に底から脱出すると、光子のエネルギーはその分だけ減少し、$E = h\omega$ からそれだけ周波数が小さくなる。すなわち「赤く」なる。これは「重力赤方偏移」と呼ばれる。ドップラー効果による一般の赤方偏移、宇宙膨張による赤方偏移とは異なるタイプである。第 2 項はその重力ポテンシャル (の井戸) による重力赤方偏移の効果を表している。第 3 項は原点 (観測者) での重力ポテンシャルの効果である。第 4 項以降は重力ポテンシャルや時空のゆらぎの効果 (積分ザクス-ヴォルフェ効果) が入っているが、ここでは詳しくは見ない。
右辺第 1 項と第 2 項に着目して考えていこう。ここで「断熱ゆらぎ」の初期条件を仮定する。それは光子とバリオンの数密度比があらゆる領域で等しい、という仮定である。これは晴れ上がりの前には光子とバリオン (水素) が $\mathrm{H} + \gamma \rightleftharpoons \mathrm{p} + \mathrm{e}^-$ の式で結びついて

いたことからも推定できる。光子の黒体放射による数密度は温度の 3 乗に比例し、バリオンの数密度は質量密度に比例するので次の関係式が与えられる。

$$3\frac{\delta T(t,\mathbf{x})}{T_0(1+z)} = \frac{\delta\rho(t,\mathbf{x})}{\rho_0(1+z)^3} \tag{10}$$

この仮定とゆらぎが長波長であること、物質優勢であることから (導出は省略)

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{SW} = \frac{1}{3}\frac{\delta\Phi}{c^2} \tag{11}$$

と求めることができる。したがって温度ゆらぎと重力ポテンシャルのゆらぎがこの式で結びつけられることとなった。これをザクス-ヴォルフェ効果とよぶ。長波長を仮定していることからこの効果が有効な角度間隔にも制限がかかる。また数密度比が等しくならないゆらぎは「エントロピーゆらぎ」とよばれるが、観測からは見つかっていない。
($n=1$ での) ザクス-ヴォルフェ効果はスケールによらない。すなわち、あらゆる角度の間隔に対して同じエネルギーのゆらぎを与えている。これは原始ゆらぎの効果を表している。

2 光子-バリオン流体

温度ゆらぎの原因は流体力学的効果も影響している。宇宙の晴れ上がり (decoupling) の前には光子、電子、陽子は光子-バリオン流体として存在していたと考えられる。この流体は暗黒物質の重力の影響を主に受けながらドロドロの宇宙の中を進んでいる。暗黒物質の重力ポテンシャルの「井戸」の深みに入っていくと重力収縮の影響で密度が高まるが、同時に圧力も大きくなる。このとき温度も上がることは、水素燃焼を終えた恒星が重力収縮によってより高温でヘリウム燃焼を始めることからも理解できる。さらに、流体にはバリオンが含まれているため質量を持ち光子のみに比べてより大きく収縮の影響を受ける。このことはパワースペクトルのピークの高さの違いに影響を及ぼしている。収縮によって圧力が大きくなっていくと、あるところで外に流れるようになる。すると密度は小さくなり圧力も落ちていき、また重力ポテンシャルに引きずり込まれるようになる。このような流体の振動によって音波が発生する (バリオン音響振動)。今述べてきたことによって流体には温度ムラがあることが確かめられるが、観測のときにはドップラー効果も影響している。晴れ上がりのときに収縮、または膨張していた流体は速度を持っているので、観測するとドップラー効果で周波数が変化する、すなわち温度ムラも変化することになる。このことによってパワースペクトルの 2 番目と 3 番目のピークが等しくなっている。

この音波による影響が無視できなくなる範囲を見積もろう。「音波の地平線距離」を

$$d_s(t_{ls}) = a(t_{ls})\int_0^{t_{ls}} \frac{c_s(t)dt}{a(t)} \tag{12}$$

と表すことができる。$c_s(t)$ は時刻 t における光子-バリオン流体による音波の音速である。この長さよりも音波のゆらぎが短いと流体力学的効果を無視できなくなる。この地平線距離を求めよう。光子流体の中で伝わる音速は

$$c_s^2 = \frac{\delta P}{\delta \rho} = \frac{1}{3}c \qquad (\because P = \frac{1}{3}\rho c) \tag{13}$$

と求められ、光速の $1/\sqrt{3}$ 倍となる。晴れ上がりのときの粒子的地平線距離は

$$d_{hor}(t_{ls}) = a(t_{ls})\int_0^{t_{ls}} \frac{cdt}{a(t)} \approx 0.251\mathrm{Mpc} \tag{14}$$

と求められる。ここから音波の地平線距離は約 0.145Mpc に相当する。この距離よりもゆらぎが小さい時流体力学的効果を無視できなくなる。ちょうどゆらぎの大きさと等しくなるときは、角径距離と角度の関係から

$$\delta\theta_s = \frac{d_s}{d_A} = \frac{d_s}{d_{hor}}z \qquad (z >> 1) \tag{15}$$

$$\approx 0.7^\circ \tag{16}$$

となる。多重極モーメント l に換算すると 100 程度となる。これ以上の l で効果が無視できなくなる。ただし宇宙が平坦でないときはこの距離から変化するため、実際に得られているパワースペクトルのデータと比較することで曲率に強い制限をかけることができる。また、光子-バリオン流体で伝わる音速はそれよりも小さくなる。前にも述べたように光子とバリオンの数密度比があらゆる場所で等しいとする仮定から音速は

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3(1+R)}} \tag{17}$$

$$R = \frac{3\Omega_{B,0}}{4\Omega_{\gamma,0}}\frac{1}{1+z} \tag{18}$$

と求めることができる。したがってバリオン密度によって音速は変化することになる。この効果と物質密度を変化させる効果はパワースペクトルのピークの高さに強く影響を及ぼす。ここから光子バリオン比 η を求めることができて、

$$\eta = (6.10 \pm 0.06) \times 10^{-10} \tag{19}$$

となる。この値からバリオンのパラメータを与えることができる。

$$n_{bary} = \eta n_{\gamma,0} = 0.251 \pm 0.003\mathrm{m}^{-3} \tag{20}$$
$$\epsilon_{bary,0} = 235 \pm 3\mathrm{MeV\ m}^{-3} \tag{21}$$
$$\Omega_{bary,0} = 0.048 \pm 0.003 \tag{22}$$

バリオンの密度パラメータはこのように CMB の温度ゆらぎの観測によって決めることができる。

参考文献

[1] Barbara Ryden. *Introduction to Cosmology.* Cambridge University Press, 2 edition, 2016.

[2] 英一郎 小松. **宇宙マイクロ波背景放射**. Number 6 in 新天文学ライブラリー = New astronomy library. 日本評論社, 2019.