Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability[1]

C1SB2064　　辻 勇吹樹

2024 年 11 月 15 日

III. 下から温められた流体の層の熱的不安定

2. 回転の効果

22.Taylor-Proudman の定理

　非粘性の回転する流体における (49),(50) 式の意味について検討する。(49) 式は (13) 式の渦度方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \mathrm{curl}(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = 0 \tag{[13]}$$

について $\boldsymbol{\omega} \to \boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}$ としたものに等しい。(Ω は時間に依存しない。) したがって 20 節と同様の議論により (50) 式が導かれる。これは

> (表面 S を囲む、閉じた等高線まわりの循環)$+2\Omega\times$($\boldsymbol{\Omega}$ に垂直な面への S の射影) が保存される

この $2\boldsymbol{\Omega}$ はコリオリの力から来ている。コリオリの力は、例えば反時計回りに回転する円盤では常に進行方向右向きに力が働く。その中で円環的に閉じた運動をしようとすると、必ず外向きの閉じない方向に力が働くため、やや内向きに動くことで閉じられる。したがって回転座標系ではその循環だけでは保存せず、閉じるための速度成分が必要になる。(13) 式は渦が突然生成されたり消滅したりすることはないことを示していた (c.f.(21) 式)。特に働く外力が保存力だけであるときに成り立ち、1 周で正味の受けるエネルギーは 0 であった。一方回転座標系ではコリオリの力 (非保存力) が働くために 1 周しても閉じないため、渦を生み出すことができる。

また定常で遅い流れではコリオリに比べて非線形項が十分小さい、すなわち

$$|\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}| \ll |\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u}| \tag{1}$$

となるとき (ロスビー数が十分小さいとき) は $\mathrm{curl}(\mathbf{u}\times\boldsymbol{\Omega})=0$、特に発散が 0 ならば (55) 式のようになる。例えば Ω を z 方向に取ると $\partial u/\partial z=0$ となり、回転軸に平衡な方向には速度の変化がない。すなわち流れが 2 次元的になる。これを **Taylor-Proudman の定理**という。(このような (粘性項と非線形項がコリオリよりも十分小さく、コリオリと圧力勾配がつりあう) 流れを地衡流という。天気予報図でよく見られる等圧線の間では、北半球では高圧から低圧に向かって右側に風が吹く。)
また Ω に平行な流れは常に一定の距離を保ってその方向に同じ速度で流れ続ける。(Taylor Column)

23. 回転する流体における波の伝播

外力のない、非圧縮の粘性流体について $e^{i(k_jx_j+pt)}$ の解を探す。(60) 式は波の伝播する向きと実際の速度の向きが垂直で横波であることを示す。
(61) 式から (63) 式を示す。まずは両辺に u_i をかけることで

$$nu_i^2 + k_iu_i\varpi + 2i\epsilon_{ijk}u_iu_j\Omega_k = 0 \tag{2}$$

$$nu_i^2 = 0 \tag{3}$$

$$\because\ k_iu_i = 0, \quad \epsilon_{ijk} : \text{anti-symmetric} \tag{4}$$

次に (61) 式に k_i をかけると、(60) 式から

$$k^2\varpi + 2i\epsilon_{ijk}k_iu_j\Omega_k = 0 \tag{5}$$

最後に Ω_i をかけると反対称性から

$$nu_i\Omega_i + \varpi k_i\Omega_i = 0 \tag{6}$$

が得られる。そして $\boldsymbol{\Omega}=\Omega_x\mathbf{e}_x+\Omega_z\mathbf{e}_z, \mathbf{k}=k\mathbf{e_z}$ と選ぶことで (65)-(72) 式が与えられる。この波は粘性の効果で減衰される円偏光の波となる。また、位相速度 V_p, 群速度 V_g はそれぞれ

$$V_p = \frac{p}{k}, \quad V_g = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}k} \tag{7}$$

で与えられ、粘性がないときは (74)-(76) 式となる。ベクトル公式から

$$\mathbf{k}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{k}) = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\Omega})\mathbf{k} \tag{8}$$

となることを用いている。

24. 回転する流体における熱的不安定性: 一般的な検討

22 節の Taylor-Proudman の定理より、非線形項が無視できて定常であるような非粘性流体の場合は流れは 2 次元的になる。特に定常的な対流の場合、このことから粘性がなければ 3 次元的な不安定性を引き起こすことはできず、必ず安定になる。粘性が不安定性において逆の働きをするというのはこのことにある。

ただし振動不安定のような回転軸方向の 1 次元の不安定性は禁じられていないため、このような不安定は粘性がない場合も考えることができる。

参考文献

[1] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. International series of monographs on physics. Clarendon Press, 1961.