Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability[1]

C1SB2064　　辻 勇吹樹

2024 年 11 月 26 日

III. 下から温められた流体の層の熱的不安定

2. 回転の効果

29. 過安定での対流の始まり　両方自由境界における解

26 節では $\sigma = 0$ が臨界状態として議論した。本説では本当に $\sigma = 0$ を通って不安定になるかを、特に過安定 (overstability) について検討する。ただし以下にいくつかの過程をする。

- **両端が自由境界**で解析解が得られる場合で考える。一般の場合は 30 節で検討する。
- σ は**準虚数**とする。2 章では対流による不安定であったため実であったが、ここでは振動による不安定を議論するため。両方の組み合わせのような不安定は考えない。
- より低いレイリー数 (浮力/粘性) で不安定が起こる。後で証明する。

まずは最低次のレイリー数を求める。(95) 式に $(D^2 - a^2 - \sigma)(D^2 - a^2 - \mathfrak{p}\sigma)$ をかけると、左辺第 2 項は (94) 式より

$$-\left(\frac{2\Omega}{\nu}d^3\right)(D^2 - a^2 - \mathfrak{p}\sigma)D \cdot (D^2 - a^2 - \sigma)Z = \left(\frac{4\Omega^2}{\nu^2}d^4\right)(D^2 - a^2 - \mathfrak{p}\sigma)D^2 W \tag{1}$$

$$= (D^2 - a^2 - \mathfrak{p}\sigma) \cdot T D^2 W \tag{2}$$

右辺は (93) 式より

$$\left(\frac{g\alpha}{\nu}d^2\right)a^2(D^2-a^2-\sigma)\cdot(D^2-a^2-\mathfrak{p}\sigma)\Theta = -\left(\frac{g\alpha\beta}{\kappa\nu}d^4\right)a^2(D^2-a^2-\sigma)W \tag{3}$$

$$= -Ra^2(D^2-a^2-\sigma)W \tag{4}$$

となる。したがって左辺第 1 項と組み合わせて (211) 式

$$(D^2-a^2-\mathfrak{p})\left[(D^2-a^2-\sigma)^2(D^2-a^2)+TD^2\right]W = -Ra^2(D^2-a^2-\sigma)W \tag{[211]}$$

が得られる。

さらに (212) 式の最低次のモードを代入すると (213) 式、π^2 で変数を規格化すると (215) 式が得られる。レイリー数はその定義から実であるはずなので、実数部分と虚数部分に分離すると (217) 式になる。また (219) 式の関係式、および (221) 式を用いると

$$R_1 = \frac{1+x}{x}\left\{(1+x)^2 - \mathfrak{p}\sigma_1^2 + \frac{T_1}{1+x} - (1+\mathfrak{p})\sigma_1^2\right\} \tag{5}$$

$$= \frac{1}{x}\left[(1+x)^3 + T_1 - (1+x)(1+2\mathfrak{p})\sigma_1^2\right] \tag{[220]}$$

$$= \frac{1}{x}\left[(1+x)^3 + T_1 - (1+x)(1+2\mathfrak{p})\left\{\frac{T_1}{1+x}\frac{1-\mathfrak{p}}{1+\mathfrak{p}} - (1+x)^2\right\}\right] \tag{6}$$

$$= \frac{1}{x}\left[(1+x)^3(1+(1+2\mathfrak{p})) + T_1\left\{1 - \frac{(1+2\mathfrak{p})(1-\mathfrak{p})}{1+\mathfrak{p}}\right\}\right] \tag{7}$$

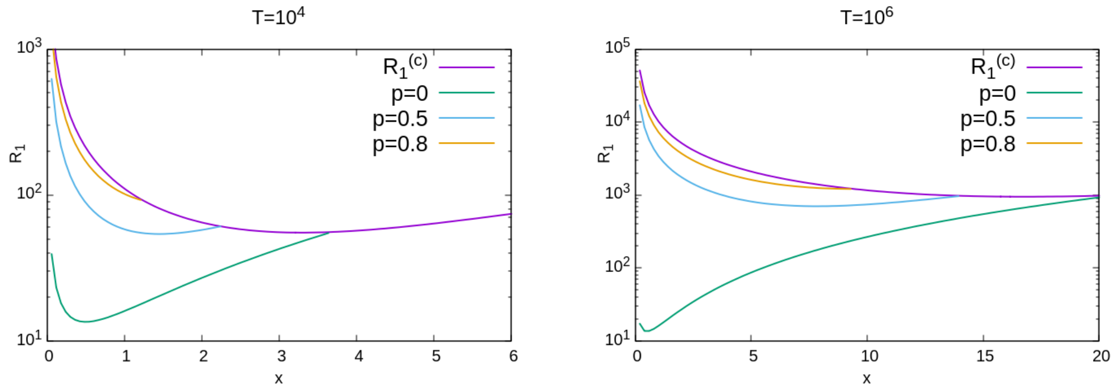
$$= 2(1+\mathfrak{p})\frac{1}{x}\left[(1+x)^3 + \frac{\mathfrak{p}^2}{(1+\mathfrak{p})^2}T_1\right] \tag{[222]}$$

となる。

(218) 式の右辺が正である、すなわち σ が準虚数であるための必要条件は (223) 式で与えられる。特に $\mathfrak{p}=\nu/\kappa$ が 1 よりも大きいときは粘性の効果が強くなり、これまで述べてきたように σ が実数となって対流不安定が起きる。1 以下で必ず overstability になることはなく、後述する。ここでは $\mathfrak{p}<1$ の範囲で考える。また波数 (を規格化した)x から見ると、$\mathfrak{p}, T$ を決めたときに (225) 式が overstability を起こすことのできる上限の $x=x_*$ である。

特に $\sigma=0$ では (227) 式であり、これを (228) 式 (=(222) 式) と比較することでどちらが最小のレイリー数をとるかを比べることができる。下図は $T=10^4, 10^6$ での 2 つの式の比較である。

$$R_1^{(c)} = \frac{1}{x}\left[(1+x)^3 + T_1\right] \tag{[227]}$$



例えば $T = 10^4$ では $\mathfrak{p} = 0, 0.5$ の場合 (228) 式の方の最小値のほうが小さくなる。不安定はレイリー数のより小さな方から生じるという仮定をしていたため、この場合は overstability が生じる。一方 $\mathfrak{p} = 0.8$ では定常の対流が生じる。$T = 10^4$ では $\mathfrak{p} = 0.5126$ が 2 つの不安定の境界となる。T を変化させると境界の $\mathfrak{p}$ も変化する。
もう一度 $\mathfrak{p}$ の視点に戻り、$T \to \infty$ としたときの不安定性の境界となる $\mathfrak{p}$ を求める。まず、$R_1^{(c)}, R_1^{(o)}$ の最小値を考える。$R_1^{(o)}$ の $2(1+\mathfrak{p})$ の右側の部分は

$$T_1 \to \frac{\mathfrak{p}^2}{(1+\mathfrak{p})^2} T_1 \tag{8}$$

とすれば $R_1^{(c)}$ と同じ形である。したがって (133) 式を参考にすると π^4 で規格化した R_1 の最小値は (229) 式で与えられる。境界では両者が等しいので

$$3\left(\frac{1}{2}T_1\right)^{2/3} = 2(1+\mathfrak{p})\left\{3\left[\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{p}^2}{(1+\mathfrak{p})^2}T_1\right]^{2/3}\right\} \tag{9}$$

$$1 = 2(1+\mathfrak{p})\left[\frac{\mathfrak{p}^2}{(1+\mathfrak{p})^2}\right]^{2/3} \tag{10}$$

$$1 = 2\frac{\mathfrak{p}^{4/3}}{(1+\mathfrak{p})^{1/3}} \tag{11}$$

$$\mathfrak{p} \approx 0.676604 = \mathfrak{p}^* \tag{12}$$

が $T_q \to \infty$ のときの境界となる。$R_1^{(c)}, R_1^{(o)}$ の最小値は T_1 の増加とともに単調増加するので、$p > \mathfrak{p}^*$ ではすべての T_1 で $R_{1,min}^{(c)} < R_{1,min}^{(o)}$ となる。したがって $\mathfrak{p}^* > 1$ の場合も含めて

- $1 < \mathfrak{p}$ では安定性交換の原理 ($\mathrm{Im}(\sigma) = 0$) が成り立ち、overstability は起こらない。
- $\mathfrak{p}^* < \mathfrak{p} < 1$ では不安定の始まりは定常 ($\sigma = 0$) の対流。

- $p < \mathfrak{p}^*$ では、不安定の始まりはある臨界のレイリー数 $T_1^{(\mathfrak{p}^*)}$ までは定常の対流であり、それ以上のレイリー数になると overstability となる

とまとめることができる。表 X に各 $\mathfrak{p}^*$ での臨界のレイリー数と、境界になっているときのレイリー数がまとめられている。FIG.28 は $\mathfrak{p}^* - T^{(\mathfrak{p}^*)}$ グラフであり、曲線の上側かつ $\mathfrak{p} < 1$ に囲まれた領域は overstability に必要なレイリー数よりも不安定が開始するレイリー数よりも大きい。

overstability が起きるときの R_c, a_c は (130) 式と (222) 式 (の規格化を戻したもの) を比較すると

$$T \to \frac{\mathfrak{p}^2}{(1+\mathfrak{p})^2} T \tag{13}$$

$$R_c \to 2(1+\mathfrak{p}) R_c \tag{14}$$

となっているだけなので、表 IX および極限は (234)-(237) 式となる。ただし $\mathfrak{p} = 0$ の粘性がない場合は 32 節で述べられる。

最後により低いレイリー数で不安定が起こることを証明する。σ_1 を準虚数として $i\sigma_1 = \sigma_1$ に置き換えると、(239) 式の 3 次方程式と (241) 式の関係式が得られる。ただし

$$\begin{aligned}
BC - D &= \frac{1}{\mathfrak{p}^2}\left[\{(1+x)(1+2\mathfrak{p})\}\left\{(2+\mathfrak{p})(1+x)^2 + \mathfrak{p}\frac{T_1}{1+x} - R_1\frac{x}{1+x}\right\}\right. \\
&\quad \left. -\mathfrak{p}\big\{(1+x)^3 + T_1 - R_1 x\big\}\right] && (15) \\
&= \frac{1}{\mathfrak{p}^2}\big[(1+x)^3\{(1+2\mathfrak{p})(2+\mathfrak{p}) - \mathfrak{p}\} \\
&\qquad + T_1\{(1+2\mathfrak{p}) - \mathfrak{p}\} \\
&\qquad R_1 x\{-(1+2\mathfrak{p}) + \mathfrak{p}\}\big] && (16) \\
&= \frac{1}{\mathfrak{p}^2}\big[2(1+\mathfrak{p})^2(1+x)^3 + 2\mathfrak{p}^2 T_1 - (1+\mathfrak{p})R_1 x\big] && (17) \\
&= \frac{1+\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}^2}\left[2(1+\mathfrak{p})\left\{(1+x)^3 + \frac{\mathfrak{p}^2}{(1+\mathfrak{p})^2}T_1\right\} - R_1 x\right] && (18)
\end{aligned}$$

として式が少し異なることに注意する。またその確認として D=0 におけるレイリー数が (227) 式、BC-D=0 におけるレイリー数が (228) 式に対応する。$D = 0$ ならば $\sigma = 0$ は

3 次方程式の解である。また方程式を実数部と虚数部に分けると、それぞれ

$$-|\sigma_1|^2 + C = 0 \tag{19}$$

$$-B|\sigma_1|^2 + D = 0 \tag{20}$$

$$\Rightarrow |\sigma_1|^2 = C = D/B \tag{21}$$

となる。3 次方程式なので実数解を 1 つ持つが、$D > 0$ ならばその解は負になる。したがって 3 次方程式を ($d > 0$ として)

$$(\sigma_1^2 + 2b\sigma_1 + c)(\sigma_1 + d) = 0 \tag{22}$$

と書き直すと、(243)-(245) 式の対応が得られる。また解は

$$\sigma_1 = -d, -b \pm \sqrt{b^2 - c} \tag{23}$$

となる。まず $R_1 = 0$ のときを考えると、(240),(245) 式を見ると $b > 0, c > 0$ が分かる。R_1 が大きくなると、実数解と複素数解の実部が 0 に近づいていく。それぞれが 0 になるときは、前述したように $R_1^{(c)}, R_1^{(o)}$ のレイリー数の式が与えられる。
このことを σ_1 の解に注目すると、まず $R_1 = 0$ ではすべての解の実部が負であり、安定となる ($\propto \exp(pt)$)。その実部が 0 になるということは臨界状態を意味していて、$D = 0$ は定常の対流、$BC - D = 0$ は overstability の臨界状態である。一方が臨界状態となるレイリー数に達すると不安定が始まるため、より低いレイリー数で不安定が始まる。したがって証明された。

参考文献

[1] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability.* International series of monographs on physics. Clarendon Press, 1961.