Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability[1]

C1SB2064　辻 勇吹樹

2024 年 12 月 11 日

IV. 下から温められた流体の層の熱的不安定

3. 磁場の効果

38. 磁場についての運動方程式とそのいくつかの結果

MHD 近似での Maxwell 方程式

$$
\begin{cases}
\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 & ([1]) \\
\nabla \times \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{J} & ([2]) \\
\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} & ([3])
\end{cases}
$$

オームの法則:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mu \mathbf{u} \times \mathbf{H}) \qquad ([4])$$

ローレンツ力

$$\mathscr{L} = \mu \mathbf{J} \times \mathbf{H} \qquad ([5])$$

誘導方程式。左辺第 2 項は慣性項、右辺は拡散項と呼ばれる。

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H}) = -\nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{H}) \qquad ([13])$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H}) = \eta \nabla^2 \mathbf{H} \quad (\eta : const.) \qquad ([15])$$

(b) 流体の運動があり、電気伝導度が無限大のとき (理想 MHD)
ここでの内容は、σ が有限であっても、磁場の減衰時間よりも磁場の変化が十分短い時間で起こるときにも有効である。すなわち式 ([15]) について、典型的なスケールを用いて

$$R_m = \left| \frac{\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H})}{\eta \nabla^2 \mathbf{H}} \right| = \frac{VL}{\eta} \tag{1}$$

を**磁気レイノルズ数**と呼ぶと $R_m \gg 1$ のときに有効になる。レイリー数 R は浮力と粘性力の比なので定義が異なる。多くの天体現象では $L \gg 1$ となるので理想 MHD 近似をすることができる。このときの誘導方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H}) = 0 \tag{[31]}$$

となる。

(i) 保存則
理想 MHD 近似のもとでは、3 章で扱った渦度方程式 (p.78)

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) = 0 \tag{[III,13]}$$

と一致し、磁場も渦度も発散が 0 であるため、それ以降の議論がそのまま成り立つ。すなわち

$$\int_S \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = const. \tag{2}$$

となる。流体とともに動く閉曲線を考えたとき、その線を囲む面を貫く磁力線の本数は変化しない。これは **Alfvén の凍結定理**と呼ばれる。理想 MHD のもとで重力収縮をすると磁束密度が大きくなるため、観測結果と整合させるためには逃がすプロセスが必要になる場合がある。

また p.80 と同じ結果から、非圧縮流体の場合、ある磁力線上の流体粒子 1 個に着目したとき、その粒子を動かすと他の流体粒子も同じように動いて同じ磁力線を構成している。この結果は磁場の場合圧縮性流体でも同様の議論ができて、式 ([31]) から

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j H_i) = H_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{[35]}$$

と連続の式を用いる。ここでベクトル公式

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{H}) = (\mathbf{H} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{H} + \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \tag{3}$$

を用いた。このとき

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{H_i}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial H_i}{\partial t} - \frac{H_i}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{4}$$

$$= \left\{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_j}(u_j H_i) + \frac{H_j}{\rho}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right\} + \frac{H_i}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) \tag{5}$$

$$= -\frac{u_j}{\rho}\frac{\partial H_i}{\partial x_j} + \frac{H_j}{\rho}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{H_i u_j}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial x_j} \tag{6}$$

$$= -u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{H_i}{\rho}\right) + \frac{H_j}{\rho}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{7}$$

となり式 [37] が導かれる。すなわち $\mathbf{H}/\rho$ が一定の線は流体粒子とともに動く。

(ii) 磁場のエネルギーと運動エネルギーの変換

式 ([31]) からエネルギー保存の式を作ると、

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{H}) \tag{[38]}$$

$$= \mu\int_V \mathbf{u}\cdot(\mathbf{H}\times\mathbf{J})\mathrm{d}V + \frac{\mu}{4\pi}\int_S (\mathbf{H}\cdot\mathbf{u})\mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \tag{[40]}$$

となる。ここでは式 [18] とベクトル、スカラー三重積の公式を用いて、$\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$ が含まれる項は境界でなくなるとして落とした。右辺第 1 項はローレンツ力が流体にした仕事による項である。磁場が流体に仕事をすることで磁場はエネルギーを失う。第 2 項は Poynting フラックスである。

非圧縮の理想 MHD では、式 (42) のようになる。表面積分は先ほどと同様にして落とした。したがって

$$\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \frac{\mu}{4\pi}\int_V H_i\frac{\partial u_i}{\partial x_j}H_j\mathrm{d}V \tag{8}$$

$$= \frac{\mu}{4\pi}\int_V \mathbf{H}\cdot(\nabla\mathbf{u})\cdot\mathbf{H}\mathrm{d}V \tag{9}$$

となる。39 節では Alfvén 波を非圧縮流体で伝わる波として導出するが、これは磁力線をまっすぐに伸ばすようにする復元力 (磁気張力) として伝わる波である。磁気張力は磁力線の曲率中心に向かって働く。この伸びたときに得られるエネルギーの変化が上式になる。

(c) 一般のエネルギー方程式

一般には (a) での流体粒子の運動がない場合と (b) の理想 MHD の場合を足し合わせることで得られる。(46) 式の右辺からジュール熱、ローレンツ力の仕事、Poynting ベクトルによる流入出に相当する。

39. Alfvén 波

運動方程式と誘導方程式の線形摂動を考えることで、Alfvén 波を導出する。仮定は以下のとおりである。

- 非圧縮かつ一様密度
- 摂動も含めた磁場を $\mathbf{H}' = \mathbf{H} + \mathbf{h}$ とすると、定常状態における磁場 $\mathbf{H}$ は一様に分布しているとする。
- ν, η は定数

非圧縮性の仮定は、流体の速度 (後で述べる Alfvén 速度) が音速よりも十分に遅い流れで成り立つ。このとき運動方程式は

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\mu H_j}{4\pi\rho}\frac{\partial H_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\rho} + \mu\frac{|\mathbf{H}|^2}{8\pi\rho}\right) + \nu\nabla^2 u_i \qquad ([10])$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\mu H_j}{4\pi\rho}\frac{\partial h_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\delta p}{\rho} + \mu\frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{h}}{8\pi\rho}\right) + \nu\nabla^2 u_i \qquad (10)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x_i}\delta\varpi + \nu\nabla^2 u_i \qquad ([47])$$

となる。0 次ではガス圧と磁気圧のつりあいになる。また誘導方程式は

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j H_i - u_i H_j) = \eta\nabla^2 H_i \qquad ([15])$$

$$\Rightarrow \frac{\partial h_i}{\partial t} - H_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \eta\nabla^2 h_i \qquad ([48])$$

となる。式 ([47]) の両辺の発散をとることで

$$\nabla^2\delta\varpi = 0 \Rightarrow \delta\varpi = 0 \qquad (11)$$

となる。これは境界で摂動が 0 になるという仮定をしたときに成り立つ。(c.f. 2-14 節,p.32) また、両辺の回転をとることで $\delta\varpi$ を消すことを今までしてきたが、それは 42 節で使われる。
こうして得られた方程式系について、時間と空間方向に伝わる波の式を考え、速度を求める。すなわち

$$u_i(x_i, t) = u_i \cdot \exp(ik_j x_j + i\omega t) \qquad (12)$$

として上 2 つの方程式および発散が 0 になる式に代入すると

$$\begin{cases}(\omega - i\nu k^2)u_i = \dfrac{\mu}{4\pi\rho}(k_j H_j)h_i & ([55]) \\ (\omega - i\eta k^2)h_i = (k_j H_j)u_i & ([56]) \\ k_j h_j = 0 \qquad k_j u_j = 0 & ([57])\end{cases}$$

まず式 [57] から波が横波であることがわかる。また式 [55][56] から分散関係

$$(\omega - i\nu k^2)(\omega - i\eta k^2) = \frac{\mu}{4\pi\rho}(k_j H_j)^2 \tag{13}$$

$$= V_A^2 k^2, \qquad V_A = \left(\frac{\mu}{4\pi\rho}\right)^{1/2} H\cos\vartheta \tag{14}$$

を与えることができ、V_A を **Alfvén 速度**という。また粘性や抵抗率が 0 でないならば ω は複素数になるため、波は減衰することがわかる。

ちなみに非圧縮の仮定をしないで解くと、ω についての 7 次方程式となり、**磁気音波**の解が現れる。詳しくは「宇宙電磁流体力学の基礎 [2]」などを参照。

(a)$\nu = \eta = 0$

この場合は Alfvén 速度で波が無限遠まで伝播する。このとき式 [55] より

$$u_i = \frac{1}{\omega}\frac{\mu k}{4\pi\rho}(H\cos\vartheta)h_i = \pm\left(\frac{\mu}{4\pi\rho}\right)^{1/2} h_i \qquad ([62])$$

となる。また流体粒子の運動エネルギーと磁場のエネルギーが等しくなることも得られる。一方波の i 成分の群速度は

$$\frac{\partial\omega}{\partial k_i} = \pm\left(\frac{\mu}{4\pi\rho}\right)^{1/2} H_i \tag{15}$$

となり、磁力線に沿って波が伝わる。これは磁力線の振動による波と解釈することができる。高校物理で学んだ、振動する弦を伝わる速度を求める式から

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{T[(\text{磁力線方向の})\ \text{張力}]}{\rho[\text{線密度}]}} \tag{16}$$

$$= \sqrt{\frac{\mu|\mathbf{H}|^2\cos\vartheta^2/4\pi}{\rho}} = V_A \tag{17}$$

として Alfvén 速度を求めることができる。発生した速度の摂動によって $\mathbf{u}\times\mathbf{h}$ の方向に電流 $\mathbf{j}$ が流れ、そうすると $\mathbf{j}\times\mathbf{h} = -\mathbf{u}$ の方向に磁気張力が発生して $\mathbf{u}$ が戻されて振動

し、波が生じている。

(b)ν, η の効果

$$\omega = \pm k\sqrt{V_A^2 - \frac{1}{4}(\nu - \eta)^2 k^2} + \frac{1}{2}i(\nu + \eta)k^2 \tag{18}$$

となり、ν, η 両方の和の効果で波は減衰していく。また位相速度は Alfvén 速度から ν, η の差の分だけ減少する。$\nu, \eta \to 0$ で展開すると式 [67] で与えられる。

参考文献

[1] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. International series of monographs on physics. Clarendon Press, 1961.

[2] 一成 柴田, 央明 横山, and 哲洋 工藤. **宇宙電磁流体力学の基礎**. Number 2 巻 in シリーズ〈宇宙物理学の基礎〉. 日本評論社, 2023.