Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability[1]

C1SB2064　辻 勇吹樹

2024 年 12 月 18 日

IV. 下から温められた流体の層の熱的不安定

3. 磁場の効果

44. 不安定が定常の対流で始まる場合の解

不安定が定常の対流で始まる場合、解くべき方程式は (135) 式 (p.165)

$$(D^2 - a^2)[(D^2 - a^2)^2 - QD^2]W = -Ra^2W \tag{1}$$

境界条件は (138)(139) 式 (p.166)

$$W = 0, [(D^2 - a^2)^2 - QD^2]W = 0 \qquad (z = 0, 1) \tag{2}$$

$$either \quad DW = 0 \qquad (rigid) \tag{3}$$

$$or \quad D^2W = 0 \qquad (free) \tag{4}$$

である。回転も磁場もない場合は $Q = 0$ とすればよい (c.f. II,(128) 式,p.26)。回転がある場合は、$Q = 0$ の代わりに TD^2W が加えられた。(c.f. III,(99) 式,p.90) また境界条件に z 方向の渦度 Z が入っていたことから、磁場のみの場合のほうがよりシンプルに考えることができる。

これから 3 つの境界条件での臨界レイリー数 R_c を求めるが、方法はこれまでと全く同様である。(教科書では同じ方法で解けるとは書かれておらず、同じ方法が繰り返し書かれている。)

(a) 両端 free の場合

(1) 式と境界条件は W の偶数回の微分の項しか含まれていないため、$W = D^2W = 0$ より W の偶数階微分は境界で 0 になる。これを満たす解は sin の重ね合わせになるが、

最低次を考えれば

$$W = A \sin \pi z \tag{[162]}$$

となる。この式を (1) 式に代入すると

$$R = \pi^4 \frac{1+x}{x} \left[(1+x)^2 + \frac{Q}{\pi^2} \right] \tag{[165]}$$

となる ($a^2 = \pi^2 x$)。回転の場合とは x については定数分だけ異なるため x 依存性は同じである。(c.f. III,(130) 式,p.95) 臨界レイリー数 R_c は上式の最小値であるから微分が 0 として

$$2x^3 + 3x^2 = 1 + Q/\pi^2 \tag{[166]}$$

となり、図 39 に $R_c - Q$ が載っている。すなわち回転のときと同様に磁場が大きいほど臨界レイリー数は大きくなる、すなわちより大きな逆温度勾配でも安定であり続けることになる。

III 章と同様に、$Q/\pi^2 \to \infty$ の極限を考えると (166) 式を満たす x_{min} も大きくなるので x^3 の項だけが効いて

$$x_{min} \to (Q/2\pi^2)^{1/3} \tag{[167]}$$

となる。この結果を代入すると R_c, a_{min} の極限も求めることができる。またレイリー数や Q の定義から、極限をとったときに

$$\frac{g\alpha\beta_c}{\kappa\nu} d^4 \to \pi^2 \frac{\mu^2 H^2 d^2 \sigma}{\rho\nu} \tag{5}$$

$$g\alpha\beta_c \to \pi^2 \frac{\mu^2 H^2}{\rho} \sigma\kappa d^{-2} \tag{[169]}$$

となる。ちなみに III 章では $T \to \infty$ で $\beta_c \propto \nu^{-1}$ となり、粘性によってより小さな逆温度勾配で不安定をもたらしていた。一方今回は β_c は動粘性率 κ には依らなくなる。この意味については 45 節で触れられる。

(b) 両端 rigid の場合

境界を $z = \pm 1/2$ に取り直すと、(1) 式を変形した (p.166)

$$\begin{cases} F = (D^2 - a^2)^2 W - QD^2 W & ([141]) \\ (D^2 - a^2)F = -Ra^2 W & ([142]) \\ F = W = DW = 0 \qquad (boundary\ condition) & ([170]) \end{cases}$$

は $z \to -z$ としても方程式を満たす。したがって偶関数または奇関数が解となり、最低次の解は偶関数解である。そこで

$$\begin{cases} F = \sum_m A_m \cos[(2m+1)\pi z] & \text{([171])} \\ W = \sum_m A_m W_m & \text{([173])} \end{cases}$$

という解を考え、変分原理を用いて R_c を求める。式 (141) に代入することで

$$[(D^2 - a^2)^2 - QD^2]W_m = \cos[(2m+1)\pi z] \tag{[174]}$$

となる。斉次解と非斉次解に分けて解くと

$$W_m = \gamma_{2m+1}\cos[(2m+1)\pi z] + \sum_{j=1}^{2} B_j^{(m)} \cosh q_j z \tag{[175]}$$

となる。それぞれの定義や解き方は Appendix1 参照。これを (142) に代入すると

$$\begin{aligned} &\sum_m A_m \big\{(2m+1)^2\pi^2 + a^2\big\} \cos[(2m+1)\pi z] \\ &\qquad = Ra^2 \sum_m A_m \left\{ \gamma_{2m+1}\cos[(2m+1)\pi z] + \sum_{j=1}^{2} B_j^{(m)} \cosh q_j z \right\} \end{aligned} \tag{[183]}$$

となる。両辺に $F = \sum_n A_n \cos[(2n+1)\pi z]$ をかけて z で積分すると、ある n について直交性から

$$\frac{1}{2}\big\{(2m+1)^2\pi^2 + a^2\big\}A_n^2 = Ra^2 \left\{ \frac{1}{2}\gamma_{2n+1} A_n^2 + \sum_m A_n \langle n|m \rangle A_m \right\} \tag{[185]}$$

となる。ただし $\langle n|m \rangle$ は n, m について対称な定数である ((186) 式参照, Appendix2)。この式は元の式 (141)(142) に戻ると F をかけて積分していたので、未定乗数 Ra^2 を用いて

$$J = \int_0^1 [(DF)^2 + a^2F^2]\mathrm{d}z - Ra^2 \int_0^1 WF\mathrm{d}z \tag{6}$$

の最小値を満たす R_c を探すことになる。これは p.167 の R_c の式の分母を固定して分子を最小化するのと同じである。すべての n について考えることで R_c の理論値を求めることができる。すなわち

$$\left\| \frac{1}{2}\Big(\frac{c_{2n+1}}{Ra^2} - \gamma_{2n+1}\Big)\delta_{nm} - \langle n|m \rangle \right\| = 0 \tag{[187]}$$

$$c_{2m+1} = (2m+1)^2\pi^2 + a^2 \tag{[184]}$$

となる。表 15 は、これらのうち $n = 1, 1-2, 1-3$ までを考えたときの R_c を載せている。1 次近似で十分な精度が得られている。

(c) 一方が rigid, もう一方が free の場合

両端 rigid の場合の奇関数解は $z = 0$ での free の条件を満たしている。したがって $d \to d/2$ とすれば全く同様に求めることができて、奇関数解として求めた R_c を 1/16 倍、Q を 1/4 倍すればよい。計算結果は表 16 に載っている。

(d)cell patterns

2 章では、

$$\begin{cases} w = W(z)\cos\dfrac{2\pi}{L}x \qquad (roll) & (7) \\ w = W(z)\cos\dfrac{2\pi}{L_x}x\cos\dfrac{2\pi}{L_y}y \qquad (rectangule) & (8) \\ w = \dfrac{1}{3}W(z)\left\{2\cos\dfrac{2\pi}{L\sqrt{3}}x\cos\dfrac{2\pi}{3L}y + \cos\dfrac{4\pi}{3L}y\right\} \qquad (hexagon) & (9) \end{cases}$$

というような速度分布を考え、流線の式を求めて cell pattern を描いた。磁場を導入した本章においては、$W(z)$ の中身が変化するだけでこれらの式は変化しない。すなわち同じ cell pattern が現れる。それは (1) 式が W だけで書かれているため、x, y 方向の位置や速度には依存しないためである。(3 章では z 方向の渦度 Z が含まれていたため cell pattern もぐるぐるしてしまっていた。)
ただし **(a) 両端 free** の (166) 式のように、臨界の波数 $a_c^2 = \pi^2 x$ が Q の増加に伴って大きくなることから、図 41 のように細長い流線となる。図 41 の上は向かい合う 2 頂点を通る線 (x=0)、下は向かい合う辺の中点を通る線 (y=0) での流線である。z 方向の磁場は z 方向には力が働かないので、z 方向はそのままで、x, y 方向の波長が短くなるので細長いパターンが見られる。

Appendix 1. W_m の一般解の導出

$$[(D^2 - a^2)^2 - QD^2]W_m = \cos[(2m+1)\pi z] \qquad ([174])$$

を解く。まずは右辺が 0 の斉次解を求める。

$W_m = e^{qz}$ として代入すると

$$(q^2 - a^2)^2 - Qq^2 = 0 \tag{10}$$

となる。この q^2 についての 2 次方程式を満たす q_1, q_2 の重ね合わせが解となる。また解が偶関数になることから $\cosh q_j z$ の重ね合わせとして表すことができる。その係数はあとで考える。

次に非斉次解を求める。$W_m = \gamma_{2m+1}\cos[(2m+1)\pi z]$ という解を考えて代入すると

$$[(2m+1)^2\pi^2 + a^2] + (2m+1)^2\pi^2 Q\gamma_{2m+1} = 1 \tag{11}$$

となり、γ_{2m+1} が定まる。以上から解は

$$W_m = \gamma_{2m+1}\cos[(2m+1)\pi z] + \sum_{j=1}^{2} B_j^{(m)}\cosh q_j z \tag{[175]}$$

となる。斉次解の係数は境界条件で決まり、$z = \pm 1/2$ で $W, DW = 0$ から

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{2} B_j^{(m)}\cosh\frac{1}{2}q_j = 0 \\ \displaystyle 2\sum_{j=1}^{2} B_j^{(m)} q_j \sinh\frac{1}{2}q_j = (-1)^m(2m+1)\pi\gamma_{2m+1} \end{cases} \tag{[180]}$$

となる。この連立方程式の解は

$$\begin{cases} B_1^{(m)} = +(-1)^m(2m+1)\pi\gamma_{2m+1}\Delta\,\mathrm{sech}\,\dfrac{1}{2}q_1 \\ B_2^{(m)} = -(-1)^m(2m+1)\pi\gamma_{2m+1}\Delta\,\mathrm{sech}\,\dfrac{1}{2}q_2 & ([181]) \\ \Delta = \dfrac{1}{q_1\tanh\frac{1}{2}q_1 - q_2\tanh\frac{1}{2}q_2} & ([182]) \end{cases}$$

と求まる。$W = 0$ の境界条件を満たすことは自明である。2 つ目の境界条件も

$$\mathrm{sech}\,q_1 \cdot q_1\sinh q_1 - \mathrm{sech}\,q_2 \cdot q_2 \sinh q_2 = q_1\tanh\frac{1}{2}q_1 - q_2\tanh\frac{1}{2}q_2 = 1/\Delta \tag{12}$$

となることから確かめられる。

Appendix 2. $\langle n|m\rangle$ について

まず、(186) 式を導出する。

$$\int_{-1/2}^{1/2} e^{q_j z} e^{i(2n+1)\pi z}\mathrm{d}z = \left[\frac{e^{q_j z}e^{i(2n+1)\pi z}}{q_j + i(2n+1)\pi}\right]_{-1/2}^{1/2} \tag{13}$$

$$= \frac{e^{q_j/2}e^{i(2n+1)\pi/2} - e^{-q_j/2}e^{-i(2n+1)\pi/2}}{q_j + i(2n+1)\pi} \tag{14}$$

$$= (-1)^n \frac{e^{q_j/2} + e^{-q_j/2}}{-iq_j + (2n+1)\pi} \tag{15}$$

$$= 2(-1)^n \frac{\cosh(q_j/2)}{-iq_j + (2n+1)\pi} \tag{16}$$

となるので、上式を $q_j \to -q_j$ としたものと足し合わせて 1/2 倍し、実部を取れば

$$\int_{-1/2}^{1/2} \cosh q_j z \cos[(2n+1)\pi z]\mathrm{d}z = (-1)^n \operatorname{Re}\left[\frac{\cosh(q_j/2)}{-iq_j + (2n+1)\pi} + \frac{\cosh(-q_j/2)}{iq_j + (2n+1)\pi}\right] \tag{17}$$

$$= 2(2n+1)\pi(-1)^n \frac{\cosh(q_j/2)}{(2n+1)^2\pi^2 + q_j^2} \tag{18}$$

として導かれる。また、(186) 式に先程求めた $B_j^{(m)}$ を代入すると、(179),(178),(182) 式を用いて

$$\langle n|m\rangle = 2(2n+1)\pi(-1)^n \sum_{j=1}^{2} \frac{B_j^{(m)}\cosh(q_j/2)}{(2n+1)^2\pi^2 + q_j^2} \tag{[186]}$$

$$= (-1)^{m+n}2(2n+1)(2m+1)\pi^2\gamma_{2m+1}\Delta\left[\frac{1}{(2n+1)^2\pi^2 + q_1^2} - \frac{1}{(2n+1)^2\pi^2 + q_2^2}\right] \tag{19}$$

$$= (-1)^{m+n}2(2n+1)(2m+1)\pi^2\gamma_{2n+1}\gamma_{2m+1}\Delta(q_2^2 - q_1^2) \tag{[188]}$$

$$= (-1)^{m+n+1}2(2n+1)(2m+1)\pi^2\gamma_{2n+1}\gamma_{2m+1}\frac{\sqrt{Q(Q+4a^2)}}{q_1\tanh\frac{1}{2}q_1 - q_2\tanh\frac{1}{2}q_2} \tag{[189]}$$

として n, m について対称であることが確認できる。

参考文献

[1] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. International series of monographs on physics. Clarendon Press, 1961.